编者按: 本文来源于美国南伊利诺大学J· 贝克教授的电子邮件. 原载2005年5月31日美国《华盛顿邮报》. 作者是该报记者Jay Mathews. 原文提到10个神话, 我们似曾相识. 现译出对我们有参考价值的前5个, 供我们思考. 任何教学改革, 都会有不同的声音. 争论是好事, 中外皆然. 为了阅读方便, 译文有少许文字改动.

关于数学教育的"神话"

几年来, 一部分活跃的教师和对数学有一定了解的父母组建的几个团体(以下称为"反对派")联手提出: 目前我们进行的数学教学是完全错误的. 这群聪明而富有创见的人, 对全美数学教师协会(美国最大的全国性的数学教师组织, 简称NCTM)发起新一轮的攻击. 这是了解美国"数学战争"的绝好机会. 反对派认为: 应该让孩子们了解他们的数学现状, 这就是: "必须学会快速地在脑子里做乘法,并且不依靠计算器来做长除法. 否则, 在学习代数时他们将一败涂地". 他们责备位于弗吉尼亚洲Reston镇的NCTM鼓吹宽松的教学环境, 放任学生自己去寻求定律法则, 在计算中过多地依赖计算器.

另一方面, NCTM人士指出: 这完全是对他们工作的一种误解.

反对派们把他们发动新的攻击称为"数学教育的神话及你不能相信的理由". 我摘录了这些"神话"的内容及其理由, 并请NCTM逐一进行了答复. 以下就是双方的意见.

神话1——只有学生自己发现的知识才能真正掌握.

反对派: 学生们学习的方法是多种多样的. 让学生自己发现知识大都需要化费大量的时间, 而这不仅不能保证学生在结束时掌握正确的概念, 还可能耽误甚至妨碍下一阶段的学习. 成功的教学应该让学生发现其中一部分经过精挑细选的知识, 而不是全部.

NCTM: 我们从未把发现法作为教学中的惟一方式或者主要方法. 事实上, 我们也同样认为学生学习的方法是多种多样的, 而且只有在恰当的时机采用恰当的方法才能使学习卓有成效. 学习的目标不仅是了解数学中的事实和过程, 还包括思考、推理和应用数学. 学生必须在深刻理解的基础上发展他们的能力.

神话2——我们期待孩子们自己发明、用自己的方法来进行基本算术操作, 而不是被动地接受标准的算术算法和理论并付诸操练. 这样, 他们对数学的理解会更深刻, 有更强的归属感.

反对派: 没有掌握标准算法的孩子在学习代数时就会遇到困难. 单是依据NCTM标准编写的教材有意淡化、甚至彻底遗漏长除法的训练, 就导致学生们在数学上面临困境. 对长除法的熟练掌握是他们进一步学习代数(多项式除法)、微积分基础(求根、渐近线)和微积分(如:有理函数的积分和拉普拉斯变换)必须掌握的一个预备知识. 这不仅要求具有估算和计算技能, 同时也有助于数的意识和对十进数制符号的灵活应用, 这是其他简单的算术操作所无法取代的.

NCTM: 我们从未主张摒弃标准算法的应用. 关于NCTM淡化长除法的论调纯粹是胡说八道. 我们坚信所有的孩子都必须熟练掌握算术运算(加减乘除), 并能在运算中应用有效而精确的方法.

不管学生使用什么特殊方法, 都应该能够对方法做出解释, 了解还存在着其他的方法,并看到那些高效、精确的数学算法的用处. 这才是进一步学习代数和更高深的数学的基础.

神话3——有两种截然不同、无法并存的教学方式. 一种是NCTM支持的通过问题解决来加深概念理解的方式; 另一种只是通过训练

和练习来教数学技能. 孩子们不需要化太多的时间来做练习或复习基本的算术操作过程. 只有概念才是重要的.

反对派: "孩子们创造力和能力的起点应同时建立在概念和算法上. ······ 数学上的成功的基础在于对算法的熟练掌握, 以及对概念的理解."

在数学中教什么是数学教学中最重要的部分. 怎样教学虽然也重要, 但被"教什么"所支配着. 很多的理解都源自对基本技能的熟练掌握——这是多数数学教授支持的一个观点. 实践证明, 学生系统地掌握他们必备的预备技能, 才可能在数学的各个领域获得成功. "神话3"把概念的理解和基础训练对立起来是完全错误的, 是一种虚假的二分法. 然而NCTM却主张"少强调"高层数学的需求, 如算术和代数中的许多基本技能等等.

"学生只能记住他们曾大量练习过的内容——只能对那些多年来持续不变的练习内容有长时间的记忆——这是无法回避的事实."

NCTM: 数学教学方式并没有走向两个极端. 有许多行之有效的教学方式. 任何一个老师都不会每天用同一种方式教学. 一个优秀的教师会把各种最好的方法加以综合运用, 使学生既能理解数学概念, 也能精通数学程序.

值得一提的是标准算法并没有在全世界形成惟一的标准. 最重要的是算法的有效性, 并让学生懂得这种算法之所以有效的依据.

教师每天要为学生的教学任务选择合适的教学形式. 那么问题就产生了: 教师提出一个问题后应该等待多长时间? 该怎样鼓励学生? 该给学生多少鼓励? 训练要达到怎样的质量和水平? ——简而言之, 这些因素综合起来成为每个学生的学习机会. 但适合所有人的模式是不存在的.

神话4——与其他教材相比, 依据NCTM标准制定的教材, 对数学学习困难学生比较好.

反对派: "在缺乏足够的数据作为依据前, 对那些新数学运动、改革或潮流的诱惑, 教育者必须加以抵制······"

来自加利佛尼亚州和国外的大量数据表明, 学习上有障碍的孩子们在构建得更完善的学习环境中表现要出色得多.

NCTM: 美国大部分教材都声称是依据NCTM标准制定的. 重要的是我们使用怎样的教学方式来教这些内容. 每一个学生, 都应享有学习重要数学, 迎接思维挑战的权利.

神话5——城市里的教师喜欢用依据NCTM标准制定的教材.

反对派: "只要提一下TERC教程(该教程强调在数学教学中要动手实践, 教程的编者不相信只依赖足够的纸笔能让数学学习奏效), 就能让波士顿教师联盟的一百多位教师代表怨声载道······"

NCTM: 进行课程改革是非常困难的, 不仅有大量的工作要做, 还需要教师、学生和家长的共同支持. 值得一提的是使用TERC教材的波士顿学生情况正日益好转. 从2000到2004年, 在马萨诸塞州测试中不及格的学生的百分比从46下降到了30, 而成绩优良的学生的百分比从14上升到了22.

(浙江省宁波效实中学 潘 青编译)

(上接第9–13页)

果的时候, 学生的学习兴趣无疑会大大提高.

3. 教学效果反馈. 直观感知数列的极限对大多数学生来说, 并非难点. 更高的要求是从哲学观上来领会极限的思想(即渗透从潜无穷到实无穷的极限观念). 从课堂上学生的回答及课后作业来看, 效果是满意的. 约有$\frac{2}{3}$的学生解答了选做作业, 尽管教师说明不作为学习要求.

参考文献

[1] 林永伟、叶立军.《数学史与数学教育》.[M]. 浙江大学出版社. 2004. 4.

[2] 中华人民共和国教育部.《普通高中数学课程标准》(实验). 2003. 4.

[3] M·克莱因.《古今数学思想》(第四册). [M]. 上海科学技术出版社. 2002. 8.

关于数学"双基"教学的速度要求

215500 江苏省常熟理工学院数学系 田 中

在检查数学学习的质量时, 是不是应有解题的速度要求, 至少东西方意见并不一致. 典型的意见, 一种是"只要会做, 不必快做", 另一种是"不但会做, 还要快做", 这在数学实践中形成了两种极端. 中国传统的数学"双基"教学, 正处于后一种极端上.

一般可以这样认为, "双基"教学的速度指标, 是学习者掌握知识和技能熟练程度的一种反映. 关于熟练和理解的关系, 李士锜先生在《"熟能生巧"吗?》一文中认为熟练是学会数学、理解数学的必要条件. 随后又在另外两篇系列论文中对此作了辩证的思考, 实际上是指出了对熟练要求应该适度的问题. "双基"教学是中国教育的特色, 对"双基"速度问题的研究不仅要依据中国的国情, 更须结合数学的特点.

一、对几份统计资料的简单分析

1. 1990–2003 年全国高考数学统考(理工类)试题数的统计

从14年的统计看出, 每年的总题数在22到30题不等. 如果用平均25.2题来分析, 粗略地扣除人脑的"反应时", 平均用于每道题的答题时间大约是4.5分钟. 这对于欲取得较好成绩从而必须完成6个解答题的考生, 就要向"熟练"要时间. 首先是尽可能缩短解答近20个选择、填空一类题目的时间. 其次, 要对相当一批常规题型的训练达到"自动化"熟练程度. 这大约就是当前应试中普遍采用"题海战术"的需求背景, 实质是求得"速度". 应当承认, 这种考试在相当程度上既是对知识水平的检查, 也是熟练程度的比拼. 正是由于处在选择的大环境, 在我国, 速度问题已成为思考和改革基础数学教育时不能回避的问题.

2. 1951–1962 年全国高考数学统考卷(理工类)试题数的统计

1951–1962年的考查面(含解析几何)和试题量与现在的考试相当, 这是精英时代的数学教育. 随后向苏联学习, 每年大题在5–6个, 总题数稳定在10个左右, 全都是解答题, 直到"文革". 要在120分钟完成10个解答题, 即使对于基础很好, 思维敏捷, 训练有素的考生, 也必需争分夺秒地快速应答近100多分钟. 也就是说, 在我国, 对速度的要求并不是应试教育产生的特殊要求, 而是一种传统. 要求熟练, 要求解题速度, 从来都是一般竞技性考试的基本指标之一, 这里面的合理性恐怕是不能否认的.

3. 江苏省教育出版社版(苏教版)的《九年义务教育小学数学教材教学参考书》对速度的要求

众所周知, 教材编写部门编制的《教参》, 是直接将文件课程(大纲或课标、教材)变为教师的理解课程的极具影响力的教学资源, 它具体传达了教材编写的意图, 对教学目标提出了"权威性"的参考意见. 苏教版《教参》对小学六个年级"双基"的速度要求，在每册中单列了一张运算达标表。综合统计，在总计41个教学项目中, 单元结束时的运算正确率, 要求在85%以上占68.3%, 期末正确率在90%以上占51.2%. 与此同时, 还有很高的速度要求(除一年级要求90%达到每分钟若干题外, 其余各年级均要求"绝大多数"达到每分钟若干题). 这是一份正在执行的速度指标. 虽然仅是苏教版《教参》, 但足以代表中国数学教育对运算速度的重视程度. 可以肯定这中间包含着合理的成份, 这点是毋容置疑的.

4. 教辅读物中对速度的要求

尽管笔者现今看到的新课标和新教参(或

关于课标的“解读”文件) 中, 没有突出对速度的要求, 但是教师们在实施时仍然自觉地把对速度要求作为衡量知识掌握和技能熟练程度的重要指标. 在他们采用的教辅读物中, 几乎都有对速度的明确要求, 这就把研究运算速度对“双基”教学的正面作用和负面影响的任务摆到了面前. 正面作用需要从数学学习心理的角度给予合理的解释, 使教师的教学行为更加自觉; 负面影响要从教学实践的角度讨论适度性问题, 以求得适当的平衡.

二、扎实的“双基”应有速度的要求

1. 初步的讨论

2000年2月, 张奠宙先生告知: 一些香港同行对我们所作的基本技能测试为什么要强调速度的问题不甚理解. 对此, 笔者在《数学基础知识、基本技能教学研究探索》一书 (2003年5月华东师大第1版)“后记”中作了如下答复:

我们的基本技能测试都有速度的要求, 其理由主要是: 在班级授课制下, 教育的测量必定既是对个体学习程度的测量, 又是对群体教学效果达成度的测量; 对群体训练效果的测量, 必定要体现比较, 没有比较就没有鉴别. 对于这种测试, 如何作群体间的比较? 除了速度指标, 恐怕没有更合适的尺度; 教育的形成性和终结性测量和评价, 历来有“诊断”和“筛选”的基本功能. 而要实现诊断和筛选, 选用速度这个指标是适当的 (P.156–157).

看得出来, 前面的资料的统计数据和这个解释, 只是从现实的角度表明, 熟练 (速度) 是当前数学教育中不得不面对的问题, 还并没有对熟练技能如何影响数学学习作出任何解释. 这种解释只能从熟练技能与知识学习、运用的关系的分析中得到.

2. 进一步的分析

按照现代信息加工理论, 学习过程是由信息接受、加工、储存、提取等基本阶段组成的. 对数学学习来说, 我们特别需要分析信息的加工和存储, 这两个阶段关系到信息的提取速度和被运用的深度和广度. 数学学习的整体性和知识的联系性是数学学习的重要特点, 而反省认知之所以成为学习的主要方式之一, 就在于它能有效促进知识的整体性和相互联系的建构. 知识网络的形成, 联系结点的增多, 结点间联结线路的缩短, 以至于在关联性较大的知识集合中形成“组块”或“组团”. 这使工作记忆负担减轻, 而在需要它们时则能“纲举目张”, 整块地被激活. 这不但提高了加工效率, 也极有益于知识的提取和运用.

中国的小学生, 几乎都能熟练地背诵乘法“九九表”. 据笔者随堂听课, 教师把构成乘法运算的内容进行了要素分析后, 用形式化的运算表加以概括, 并通过大量卓有成效的练习达到自动化的过程(并非机械的背诵, 例如 $1\sim5$ 以内的口诀, 教学时在懂得意义的前提下, 要求学生横背、竖背、拐弯背等等, 活泼、有趣且有效). 这样, 任何复杂的乘法运算, 在学生看来, 都不成问题. 因为算法的核心部分好像不经过大脑就能脱口而出一样. 算法被压缩成了“九九表”, 进而在大部分小学生头脑中, 渐渐地连“九九表”也不见了, 而变作自动执行的算法规则, 剩下来的只是进位、小数等新规则的执行.

下面以两个数学解题的实例具体分析“组块知识”在记忆、加工、提取、运用中的作用.

[实例1]　关于两个三角形面积比的问题: 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上分别有四等分点 D、E、F, AD、BE、CF 两两分别相交于 P、M、N, 求 $\triangle PMN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比.

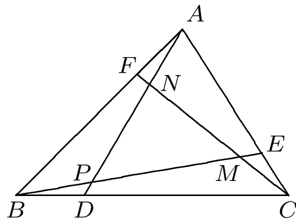
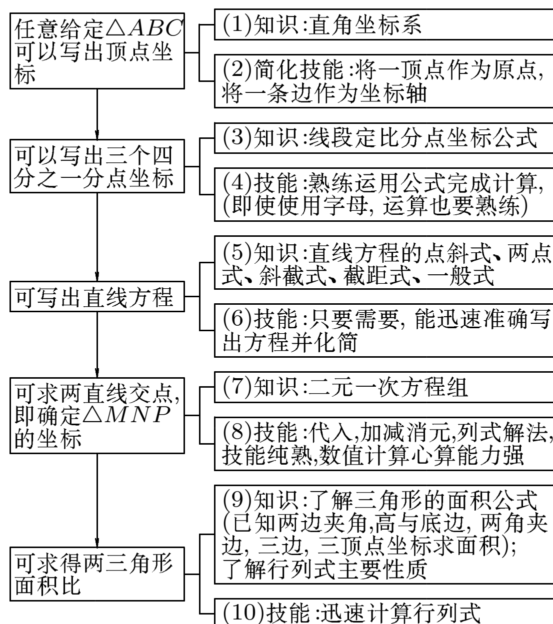


图 1

在解题中, 一些学生的思路就以“组块”的方式跨步前进: 对给定的 $\triangle ABC$, 四等分点 D、E、F 的位置是确定的, 一旦 A、B、C 的坐标给定, 则它们也就可以写出; 从而直线 BE、CF、AD 的方程必可写出; 故 P、M、N 的坐

标可以确定; 如此, 两个三角形面积也可求出. 这就形成了问题解决的一个可行方案. 可以用下面的框图表示上述的过程.



五个知识与技能的“组块知识”组成思考的链条, 在大踏步进行的思考中只作宏观的、在组块之间的策略调配, 而所有细节, 即每步的具体实现, 由于知识熟记于心, 技能训练达到自动化, 因而不必多虑. 它们在工作记忆中所占的空间, 只是几个公式或解法的语言名称(符号), 在实施解题方案时再由长时记忆调入工作记忆, 这样的加工效率当然是较高的.

[实例 2] 现行高中教材中从线性规划问题中抽象出的一个纯数学模型. 问题: 设 $z = 2x + y$, x、y 满足 $\begin{cases} x - 4y \leqslant -3, \\ 3x + 5y \leqslant 25, \\ x \geqslant 1, \end{cases}$ 求 z 的最大值与最小值.

(下面是基于本人真实的心路历程所作的记录和分析.) 首先粗略地审视了问题的条件和目标. 最先在我脑子中反映的是“条件最值”的初等解法——最好能由条件式中得到两个变量间的一个关系式代入二元函数中, 使之转化为一个一元函数再作考虑. 但瞬即便打消了这个念头, 因为所给的条件式都是不等式.

接着出现的一个念头是, 根据二元一次不等式的几何意义, 似乎可以确定一个平面区域. $ax + by + c \geqslant 0\,(\leqslant 0)$ 表示直角坐标系下由直线 $ax + by + c = 0$ 划分的一个半平面, 这是我熟悉的. 而且我还熟悉用坐标原点代入, 根据 c 的符号确定是哪个半平面. 例如, $x - 4y + 3 \leqslant 0$ 因 $c = 3 > 0$, 故直线 $x - 4y + 3 = 0$ 与原点同侧的半平面满足于 $x - 4y + 3 > 0$, 另一侧的半平面以及线上的点满足 $x - 4y + 3 \leqslant 0$; $3x + 5y - 25 \leqslant 0$, 因 $c = -25 < 0$, 故 $3x + 5y - 25 \leqslant 0$ 表示的是与原点同侧的半平面(含直线上点). 于是我的组块知识帮助我明了约束条件的几何意义是一个平面区域; 而且我能实现对它的快速确定.

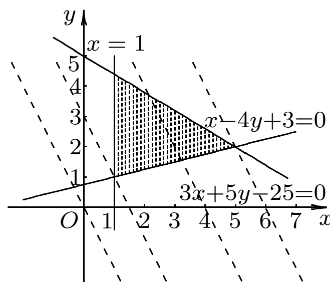
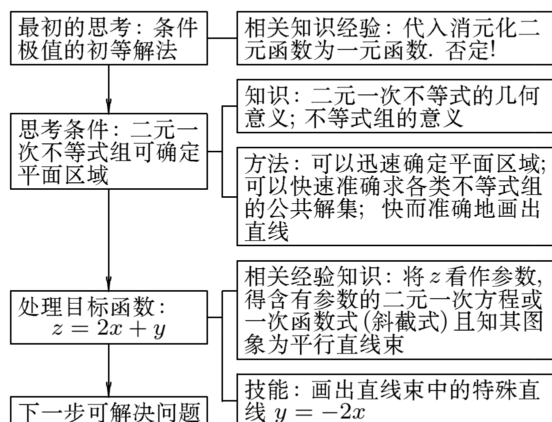


图 3

接下来是如何处理目标函数 $z = 2x + y$? 我过去已有这样的解题经验: 将 z 看作常数, 则这是一个二元一次方程, 而二元一次方程的有关知识和技能对每个中学生都是熟悉的, 例如二元一次方程和一次函数的关系; 直线方程的各种形式; 直线的简单画法等等. 这是又一个组块知识. 而当把 z 看作变量时, 它又代表了与直线 $y = -2x$ 平行的直线束. 我在用两个组块知识分别思考了条件和目标函数后, 即将两者联系起来思考. 我十分清楚的是, 目标函数 $z = 2x + y$ 的变域 (x, y) 正是我心中的那个平面区域, 于是, 我就很快明确了下一步该做什么. 也用下面的框图反映这样一个思维过程.

基础扎实的高中生, 许多系统的基础知识经过理解和充分的技能训练, 被整理和浓缩成“组块知识”贮存, 只明显在头脑中保留了一个名称. 例如, 这里是“二元一次方程和二元一次



不等式”、“一次函数”和“直线方程”, 至于诸多细枝末节, 则隐藏于长时记忆中等待具体实施中再被激活、调用.

在数学解题中, 常常采用“转化”或“化归”的策略. 例如, 将“求函数 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta-2}$ 的最大值和最小值”的问题转化为“求单位圆上点 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 到点 (2,1) 之间连线斜率的最大、最小值”; 将“已知 $x+y+2=0$, 求 $z=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 的最小值”转化为“求点 $(1,-1)$ 到直线 $x+y+2=0$ 的距离”. 达成此类转化, 也必定要求解题者有关于直线方程、斜率、坐标、三角函数、点线距离公式等“组块知识”的基础, 并熟练到“呼之欲出”的程度, 才容易在广泛联系中被激活. 这使得数学问题解决中的思维长度缩短, 解题速度提高.

上述实例反映的情况, 在我国基础数学教育中并非个别. 它应该能够说明, 牢固的知识基础和充分的技能训练所带来的速度对提高数学学习效率是有益的. 通过对大量中小学课堂和日常教学的观察及对案例的分析, 笔者得到了这样的结论: 在“双基”要求上, 中国数学教育的不足往往是“持度过严”, 而西方的不足大概正是“持度过宽”. 搞成“题海”显然就是过度了, 而只要“会做”就算学到了显然属于过宽. 在“宽”与“严”之间寻求适当的平衡应当是东西方数学教育比较研究需要解决的一个有价值的课题.

三、优质的数学教育对速度的要求应当适度

当我们面对小学生已经讨厌数学、认为学数学枯燥乏味的时候; 面对中学生在频繁的应试压力下苦渡“题海”, 疲于拼命的时候; 面对很多数学教师把一摞摞练习题抛给学生以求“夯实基础”的时候, 适度性问题就现实地摆到了面前. 张奠宙先生曾以“花岗岩基础上盖茅草房”批评这种现象, 李士锜先生以“熟能生笨”、“熟能生厌”的论题分析了“过度”的危害. 这里存在着两个基本的问题. 在观念层面上, 并非很多人认识到这是一个迫切的问题, 甚至连它是不是一个问题都没有解决. 在实践层面上, 怎样确定一个适度的数量标准以求得广大的认可.

1. 在观念层面上的适度性问题

结合实践, 这里需要解决的是在执行教学任务时应该分清重点、非重点, 基本、非基本, 本质、非本质, 把“双基”教学对速度的训练放在重点、基本、本质内容上, 实现对速度要求的宏观把握.

例如, 一位教师用整整一节课讲“同位角、内错角、同旁内角”概念, 然后设计了各种各样的图形让学生作概念辨析练习. 把原本可以淡化的并非重要的问题引向繁琐无用的死角, 这是一种过度的延伸; 中国数学“变式教学”本来是一样好东西, 但是不分青红皂白, 在并非基本的内容上刻意追求多变增加学生的负担大可不必; 围绕本质进行必要的重复练习符合数学学习规律, 但并不是越多越好. 做得让学生讨厌数学就常常包含了过度, 而惩罚性的重复则不仅过度, 更是愚蠢; 适当选择编制精良的教辅材料本也无可厚非, 但喧宾夺主, 将教材抛在一边, 以五花八门的教辅材料代之, 课上“以题为纲”, 课后“以题为中心”大运动量训练, 这是当前许多中学教学的通法, 使师生一起受罪.

2. 在实践层面上的适度性问题

人人在理论上都承认学生是有差别的, 但在实践上却普遍要求全体学生接受同样强度的训练, 这是一个矛盾现象. 研究制定可供操作的量化指标势在必行. 这里介绍一例, 其过程和方法反映了一种制作思想.

1999年《数学教学》第3期上，我们公布了"中学生'整式运算'技能的测试及评估标准"，提出了"整式运算"训练适度性的一个"标准参照表"，如下：

整式运算测试结果标准参照表

标准项 / 年级	平均线		合格线		优秀线	
	T	B	T	B	T	B
初二	17.90	32.02	$\geqslant 13$	$\geqslant 22$	$\geqslant 27$	$\geqslant 50$
初三	21.84	38.93	$\geqslant 16$	$\geqslant 26$	$\geqslant 32$	$\geqslant 62$
高一	27.67	50.06	$\geqslant 24$	$\geqslant 41$	$\geqslant 34$	$\geqslant 68$
高二	30.06	55.59	$\geqslant 26$	$\geqslant 45$	$\geqslant 36$	$\geqslant 71$
高三	31.29	58.71	$\geqslant 28$	$\geqslant 49$	$\geqslant 36$	$\geqslant 71$

注：T——正确题数(最大值为38)；B——正确步数(最大值为75)

需要说明的是：第一，关于研制方法. 为了衡量学生运算技能训练的情况，经过分析，我们以"整式运算"为代表制作了测试量表. 并于1997年3月至1998年12月先后两次对苏州、无锡、镇江、扬州地区的7个县市中9所学校53个教学班共2829名初二至高三的学生进行了大样本测试，经SAS统计软件处理后，得到了分年级运算正确题数、步数的频数、频率分布表. 另根据许多中学数学高级和特级教师的经验，均比较倾向于把学生数的80%以上作为及格达标线，把学生数7%以内作为优秀达标线. 我们尊重了这个意见，以此作为确定及格线和优秀线正确题数和步数的依据. 以初二年级为例，在样本频数、频率分布表中，总人数526人，其中正确题数$>$ 13题的415人，占78.9%，13题是最接近80%的依据，被取作及格标准题数；正确题数$>$ 27题的36人,占6.84%，故27题是最接近7%以内的数据，被取作优秀标准题数. 其他各年级标准的确定同此方法. 可以认为，这个依赖大样本测试数据，结合教师经验得到的标准是相对客观的参照值，是可信的.

第二，对"标准"有效性的一个佐证. 一个测试量表的价值，有科学性和适用性两方面. 虽然，我们制定的量表，在科学性上已经充分考虑了与我国数学教学大纲、教材及实际教学相匹配，而且在制作技术上遵循了"真正基本"的原则，但是，"评估标准"所依据的数据却都来自经济文化比较发达的苏南地区. 因此，这个"标准"的适用价值就值得考虑. 为了检验"标准"是否有更大的适用面，可行的办法就是扩大测试区域，用新的数据资料来支持或者修正它，或者采取分别给出适合各大区域的"标准"的方法. 2000–2002年，我们选择了河南省郑州、开封和豫龙县共6所学校的14个教学班初二至高二的730名学生为被试；选择了新疆石河子市的两所学校7个教学班初二至高二的349名学生为被试，按同一量表和相同的条件进行测试，对数据仍用SAS统计软件作了处理. 从统计分析中我们得到的结论是：尽管我们的"标准"是依据苏南的大样本作出的，但这个"标准参照"仍然有参考价值. 而且就河南的大样本来看，四个年级除了初三以外，均超过或基本达到及格线，这纠正了我们最初的估计. 这是否也能说明我们确定的及格线可能对河南这样的地区也是适宜的. 这为我们提供了一个"量表"和"标准"有效性的佐证.

第三，对操作性的说明. 这个"标准参照表"的实用意义是：对凡是学完了整式运算基本内容的学生(一般在初二下学期后半期以后的各年级)，在任何时间、任何地点采用本量表，用同样的时间(10分钟)测试，均可获得两方面信息：其一是学生个体达到的层次，其二是学生群体(班级或学校等)训练水平的适当定位. 在基本达到标准(班级达到率)时，教师可以比较放心地积极前进，否则，可能就要采取一定措施予以弥补.

对技能训练适度性的研究是优质数学教育研究必要的组成部分. 这对于既要保持和发扬我国数学教育优良传统，又要克服过度训练给学生带来的诸多危害具有重要价值. 其中，制定适度性标准更是一件困难的工作，但它又是不容回避的任务. 我们的工作不过是一个开头，更广大的空间是属于大家的.

参考文献

田中、徐龙炳、陆蓉. 中学生"整式运算"技能的测试及评估标准. 数学教学. 1999年第3期.

对空间向量教学的调查、研究与思考

315131 浙江省宁波鄞州正始中学 胡乾彪

从2001年秋季开始, 人教社编写的新教材在浙江等20个省市使用. 高中立体几何内容编排了A、B两个版本, A版本的编排主要沿袭综合立体几何的传统, B版本的编排则围绕空间向量进行. 学校可以任选一种进行教学.

以前我们一直都用A版, 今年尝试A、B版本合用. 既讲授传统的综合几何, 也用空间向量进行补充, 使用后得到了意想不到的结果.

我校对高二学生进行了一次立体几何单元测试, 有这样一道题:

如图1, 已知直棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 底面四边形$ABCD$是直角梯形, 上底边$BC=2$, 下底边$AD=6$, 直角边所在腰$AB=2$, $AA_1=4$, G是CD中点, E是CC_1中点, F在AD上, 且$AF=\frac{1}{2}FD$.

(1)求异面直线EG和FD_1所成角;

(2)求二面角$E-FG-D_1$的大小.

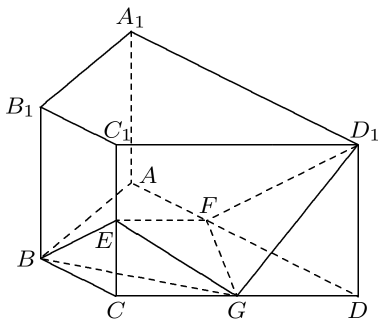


图 1

对题目分析:

方法一(用A版教材) 连接BE、BG, 可证$BE /\!/ D_1F$, 在$\triangle EGB$中计算出$\angle BEG$可得(1); 求出二面角$E-FG-C$的平面角α与二面角$D-FG-D_1$的平面角β, 用$\pi-\alpha-\beta$可得(2).

方法二(用B版教材) 建立空间直角坐标系, 分别求出点E、F、G、D_1的坐标, 就能求出异面直线EG和FD_1所成角; 若求出平面EFG和平面FGD_1的法向量, 就可求出二面角$E-FG-D_1$的大小.

阅卷后发现学生答题基本采用上述两种方法之一, 然而答题的效果、质量却大不相同.

统计如下: 我校高二学生共528人.

	人数	得分率	存在问题	原因
传统法	132	20%	① 作不出所求角的平面角 ② 作出了平面角但不会计算	① 空间想象能力不强, 不能把空间问题转变为平面问题 ② 运算能力欠缺
向量法	363	75%	点坐标、平面的法向量计算错误	思路正确, 但运算能力不强

1. 问题提出

为什么学生选择两种解题方法的人数如此悬殊、得分率又有如此大的区别呢? 本人为此展开一次调查 (问卷调查及调查结果附后).

2. 调查分析

以2005年3月从高二年级随机抽取样本200人作为研究对象, 通过问卷调查和访谈进行了调研, 主要从解答立体几何问题时学生用两种方法的习惯、解题速度、精确度、掌握的难易程度等方面展开.

调查发现: ① 学习向量几何较传统综合几何容易, 如问卷调查中的(1)、(2). 由于学生在高一已学习了平面向量, 稍加推广就得到了空间运算体系, 所以学生感觉学习空间向量直观, 并不象传统的几何知识那么抽象; ② 解题习惯上向量法优于传统方法, 如问卷调查中的(3) ~ (6). 向量法主要通过计算, 不需要太强的空间想象能力, 更易于被学生接受; ③ 方法选择上向量法优于传统综合几何方法, 如问卷调查中的(8) ~ (11). 向量法有一定的解题规

律, 有统一的解法, 学生在解题的思路上更愿意采用向量法, 而且用向量法解题更准确、速度更快.

2.1 由教材特点分析

高中数学新课程中, A版本重点通过演绎证明和逻辑推理建立几何体系, 新课程教学大纲虽进行了修改, 教学要求也大大降低, 如有7处"掌握"级要求降为"了解"级要求, 特别是论证方面, 删去了"利用有关概念进行论证和解决有关的问题"的要求, 将"三垂线定理及其逆定理"由"掌握"级降为"了解"级要求(但在考试大纲中仍为"掌握"级), 由于学生初次接触空间问题, 还没有建立一定的空间想象能力和逻辑思维能力, 而在实际解答中常常需要他们有较强的空间想象能力和逻辑思维能力, 所以感到较难接受; B版本是应用空间向量的方法处理几何问题, 把几何图形的性质代数化, 通过计算解决几何问题, 不需要太强的空间想象能力, 符合高中学生的智力发展和认知水平.

2.2 由学生认知特点分析

从问卷调查反映出学生在学习空间向量、三垂线定理等基础知识时, 差别并不很大, 而在转化为方法需在解题过程中运用时, 则表现出完全不同的看法, 学生更愿意选用向量法. 这是因为对于一些立体几何问题, 常常要求学生判断点、线、面的位置关系, 进行角与距离的计算, 如果用传统的解法, 需要从公理、定理开始使用"形到形"的演绎、推理, 会很繁琐, 再加上有些空间图形的复杂性, 导致技巧性较大, 随机性较强, 而计算又主要是构造三角形, 应用勾股定理、余弦定理和正弦定理求解, 需要对图形进行平移、投影等各种转化, 而且不同的问题需要不同的技巧, 缺少统一的求解方法; 而向量法则不同, 向量具有几何形式和代数形式的"双重身份", 其基本要求是能快捷地建立空间直角坐标系, 求出相关的坐标, 或用向量之间定理、性质通过计算解决问题, 且有一定的通法, 使解题程序化, 增加了可操作性.

2.3 由思想方法分析

立体几何的传统方法与以前学习过的内容、方法没有太大的联系, 而向量法能用代数方法处理, 即使空间想象能力差点的学生, 也不会感到立体几何那么遥不可及了. 它减少了学生学习论证、度量问题的困难, 使高中数学中"数形结合"理论得到新的解析, 为在高中数学贯彻"数形结合"的教学理念提供一种崭新的方法, 同时也为学生进入高一级学校学习如空间解析几何、线性空间、微分几何等打下一个基础.

3. 教学启示

空间向量在平行、垂直关系的论证, 避开了各种辅助线添加的难处, 在空间角和距离的计算上有着独特的优势. 特别是用向量的数量积、坐标求异面直线所成的角, 斜线和平面所成的角, 用平面的法向量求二面角的平面角, 点到平面的距离, 异面直线间的距离, 两平行平面间的距离等问题, 体现了向量解法的强大功能. 在近几年的高考题中也体现了这一特点, 如2000–2002年高考中都设计了两道分值相等的试题, 分别供使用高中数学教科书第二册(下A)和第二册(下B)两种不同教材的考生选做其中的一道题; 而去年、今年都采用了同一道试题, 既可以用传统方法求解, 也可以用向量法求解, 由考生自己选择. 但从学生反馈看, 解题更倾向于采用向量法.

例1 (2003年全国高考试题) 如图2, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB=90^\circ$, 侧棱 $AA_1=2$, E、D 分别是 A_1B 与 CC_1 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G. 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小 (结果用反三角函数表示).

解: 如图2所示, 建立空间直角坐标系, 坐标原点为 C, 设 $CA=2a$, 则 $A(2a,0,0)$, $B(0,2a,0)$, $D(0,0,1)$, $A_1(2a,0,2)$, $E(a,a,1)$, $G\left(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{1}{3}\right)$.

$\because$ $\overrightarrow{GE}=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{BD}=(0,-2a,1)$,

$\because$ 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G, $\therefore$ $GE\perp$ 平面 ABD,

$\therefore$ $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}=0$,

$\therefore\ a=1,\ \overrightarrow{GE}=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right),\ \overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-2)$,

$\because\ \overrightarrow{GE}$为平面$ABD$的法向量,

$\cos\langle\overrightarrow{GE},\overrightarrow{A_1B}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{GE}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore\ A_1B$与平面ABD所成角是

$\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ \left(\text{即}\ \arccos\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

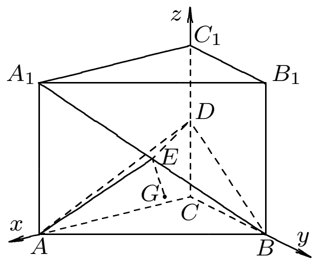


图 2

例2 (2004年北京春季高考题) 如图3, 四棱锥$S-ABCD$的底面是边长为1的正方形, SD垂直于底面$ABCD$, $SB=\sqrt{3}$, 设棱SA的中点为M, 求异面直线DM与SB的距离.

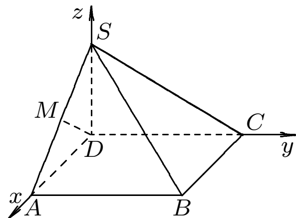


图 3

解: 建立空间直角坐标系$D-xyz$, 如图3. $\because\ SB=\sqrt{3}$, 正方形$ABCD$的边长为1, $\therefore\ SD=1$, M为SA的中点.

$\therefore\ D(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$S(0,0,1)$、$B(1,1,0)$, SA的中点$M\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$.

$\therefore\ \overrightarrow{DM}=\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right),\ \overrightarrow{SB}=(1,1,-1),\ \overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设法向量$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$, 且$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{SB}$,

则$x+z=0$, $x+y-z=0$.

取$x=1$, 得$y=-2$, $z=-1$,

$\therefore\ \overrightarrow{n}=(1,-2,-1)$,

$\therefore\ \overrightarrow{DB}$在$\overrightarrow{n}$上的射影长度为

$\dfrac{|\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

$\therefore$ 异面直线DM与SB的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

上面两例除向量法外也可用传统方法解决, 但不如向量法直观、简便. 向量法有一定的通法, 可是传统方法也不能完全摈弃. 平面的基本性质、空间线面平行、垂直的各个性质是研究立体几何的重要基础, 空间概念的建立、空间想象能力、逻辑思维能力的培养也不能完全降低. 我们在教学中要把几何综合推理和向量代数运算推理有机地结合起来, 在处理具体问题时, 要采取实事求是的态度: 凡是用向量比较容易解决的问题, 就以向量法解决; 而对有些直接使用线面关系性质定理、勾股定理和三角知识比较容易解决的, 或建立空间直角坐标系较困难的问题, 仍用传统方法去对待.

附 问卷调查

亲爱的同学们, 为了能收集到有关"空间向量"的全面而准确的信息, 我们制作了这份调查问卷, 希望你能积极的配合! 问卷不记名, 只要你把真实的想法选出来写在括号里. 谢谢!

1. 对"空间向量"的学习, 你的感觉是 ·( )

(A) 直观; (B) 一般; (C) 抽象.

2. 对传统的综合几何知识(如三垂线定理等)学习, 你的感觉是······························( )

(A) 直观; (B) 一般; (C) 抽象.

3. 你认为"空间向量" (下面称向量法)对解决立体几何问题·····································( )

(A) 没有用; (B) 有一点用; (C) 很有用.

4. 你认为传统的综合几何方法(下面称传统方法)对解决立体几何问题 ··················( )

(A) 没有用; (B) 有一点用; (C) 很有用.

5. 学习"空间向量"后·························( )

(A) 解题简便; (B) 变化不大;

(C) 几乎没变化.

6. 你学习空间向量后( )用向量知识解立体几何问题.

(A) 几乎没有; (B) 偶尔; (C) 经常.

从一道中考题看探究教学要关注过程和方法

324002 浙江省衢州市教育局教研室 胡兴余

2004年浙江省衢州市中考数学卷最后一道题设计了寓意深刻的探索性试题, 引起了教师的关注.

题目(第25题) 如图1, 在平面直角坐标系中, 已知$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A(0,3)$、$B(-2,0)$、$C(m,0)$, 其中$m>0$, 以OB、OC为直径的圆分别交AB于点E、交AC于点F, 连结EF.

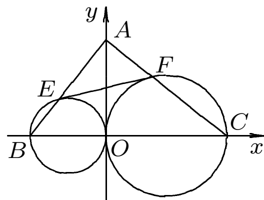


图1

(1)求证: $\triangle AFE\backsim\triangle ABC$.

(2)是否存在m的值, 使得$\triangle AFE$是等腰三角形?

若存在, 求出m的值; 若不存在, 请说明理由.

(3)观察当点C在x轴上移动时, 点F移动变化的情况, 试求点$C_1(\sqrt{3},0)$移动到点$C_2(3\sqrt{3},0)$时, 点F移动的行程.

本题是一道寓方法性、过程性、探究性于一身的综合题, 这种"动点与坐标系相结合"的几何探索题, 将几何图形置于坐标系中, 让动点带动一个(或几个)几何图形(交点、三角形、圆), 形成新的图形. 在这一变化过程中, 探究图形形状、位置关系及内在联系, 综合运用数学思想方法和方程、几何、三角函数等知识进行解答, 对学生的探索能力提出了较高要求, 有效地考查了学生的探究过程和探究方法. 现对本题探究过程作如下分析:

探究1: 第(2)小题当点C在x轴上运动时, $\triangle AEF$、$\triangle ABC$有什么变化?

形状发生改变. 通过观察、比较、猜想, 作出合情推理, 在变化过程中$\triangle AEF$为等腰三角形应有三种情况.

---

7. 平时在解立体几何问题时, 你经常用(　)解题.

(A)向量法; (B)传统方法;

(C)视情况而定.

8. 在解立体几何问题时, 你认为用"向量法"比用"传统方法"的解题速度 ……………(　)

(A)快; (B)一般; (C)慢.

9. 在解立体几何问题时, 你认为用"向量法"比用"传统方法"的精确度…………………(　)

(A)高; (B)差不多; (C)低.

10. 在解立体几何问题时, 你认为用"向量法"比用"传统方法"的解题思路 ……………(　)

(A)直观; (B)抽象; (C)差不多.

11. 在解立体几何问题时, 你认为用"向量法"比用"传统方法"的难易程度 ……………(　)

(A)难; (B)差不多; (C)简单.

调查结果

本次对我校高二年级(共528人)随机抽取的样本200人进行了调查, 调查结果如下:

	1	2	3	4	5
A	48.7%	23%	4.4%	3.6%	82.3%
B	44.2%	44.5%	13.3%	74.3%	15%
C	7.1%	32.5%	82.3%	22.1%	2.7%

	6	7	8	9	10	11
A	20.2%	20.4%	64.6%	51.3%	71.7%	5.3%
B	38.1%	4.4%	23%	39.8%	10.6%	12.4%
C	41.7%	75.2%	12.4%	8.9%	17.7%	82.3%

数学文化观下的数列极限教学

315300　浙江省慈溪中学　施　斌　丁乃芬

一、课题分析

极限的思想是数学中极为重要的思想, 极限概念是学生学习微积分的基础. 然而在数学史上, 极限概念的完善却是在微积分产生之后, 数学家们在解决第二次数学危机过程中, 经过近百年的工作才给出了极限的$\varepsilon-N$ (或$\varepsilon-\delta$) 的定义方法. 新课程实施前, 大多数教师对极限概念的教学采取咬文嚼字反复解释的方法, 终

～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～～

探究 2: 在图形变化过程中 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ABC$ 的关系有什么变化?

由第 (1) 小题的证明过程不难发现, 其相似性与点C的运动无关, 故$\triangle AFE$与$\triangle ABC$相似的关系保持不变, 因而可把问题转化为判断$\triangle ABC$如何成为等腰三角形的问题.

探究3: 第(3)小题当点C在x轴上运动时, 点F运动变化形成的大致图形是什么?

这里要充分体现探究过程和方法, 我们首先要关注点F移动的路径是直的还是曲的? 探求规律一般运用从特殊到一般的研究思想. 为此, 我们先作几个符合运动规则的图形, 通过观察、实验、比较, 动中窥静, 作出猜想, 可以猜测点F移动的路径F_1F_2是曲的.

探究4: F_1F_2是曲的, 那么它究竟是什么图形呢?

F_1F_2是曲的, 要计算它的长度, 根据我们已有的知识经验,借助于合情推理, 可以猜测F_1F_2可能是一段圆弧.

探究5: 你能证明F_1F_2是一段圆弧吗?

当点C运动时, 通过观察、比较, 可以发现$\angle AFO$始终为直角, 点F到OA的中点距离等于定长$\frac{1}{2}OA$, 故F_1F_2是以OA为直径的圆上的一段弧.

探究6: 要计算弧长, 应先探求哪些量?

这里的半径和圆心角都需要经过探索才能获得.

教学时要鼓励学生大胆提出问题, 本题还可继续探究, 如当点C在x轴上移动时, 是否存在m, 使得EF是两圆的公切线等问题.

我们对本题随机抽样了300份试卷进行统计, 得分率仅为21.4%. 从卷面分析中我们发现, 做第(3)小题的大部分同学都认为点F移动的路径是线段F_1F_2或直线F_1F_2, 反映出这些同学仅凭主观判断, 更受思维定势的影响, 从而导致错误. 说明学生的探究意识淡薄, 为此, 我们在数学探究教学中要特别关注以下两个方面:

1. 关注探索方法的培养

教学中要加强学法指导, 经常让学生经历观察、实验猜想、验证、交流等数学活动, 逐步学会探索的基本方法, 使学生善于观察, 善于发现图形的特点, 数量关系的特征和数学知识间的内在联系. 渗透"猜想＋证明"的发现问题和解决问题的科学思维, 学会猜想方法, 发展合情推理能力和逻辑推理能力.

2. 关注探索过程的教学

美国心理学家布鲁纳说:"探索是教学的生命线". 的确, 没有探索, 就不会有新的发现. 因此, 在课堂上要给学生提供从事数学活动时空, 让学生多动脑、多动口、多动手. 教学中要把凝结在教材中知识背后的材料及探究活动过程充分展开, 给学生多一点思考的时间, 多一次表达思维的机会, 暴露思维的发生、发展的过程, 使学生在探索中学会独立思考, 学会多角度思考, 学会数学地思维.

因其过于抽象而收效甚微. 现行的高中数学教材(人教版试验修订本)中, 采取直观描述的方法给出数列极限的定义, 这是考虑到高中生的认知水平, 也体现了新课程"强调本质, 注意适度形式化"的理念. 《普通高中数学课程标准》中指出: 数学课程应该返璞归真, 努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质, 把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态. 基于上面的考虑, 笔者从极限思想的发展史角度谈谈本节课的教学.

二、教学过程

1. 人们最初对无限的认识

公元前4世纪, 我国春秋时期的庄周"天下篇"指出: "一尺之棰, 日取其半, 万世不竭." 同时期, 古希腊有个大诡辩家芝诺提出了四个诡论, 其中最著名的叫"神行太保追不上乌龟"

假设乌龟与人赛跑, 为简便计, 不妨设 $V_{人} = 10V_{龟}$ (V 为速度), 又设龟在人前面100米起跑, 两者同时开跑, 当人跑了100米到达龟出发点时, 龟已向前爬了10米, 人再追10米,龟又爬了1米, 人又追了1米, 龟又爬了0.1米, $\cdots\cdots$, 如此下去以至无穷, 人和龟之间永远间隔了一段距离, 也即人永远也追不上乌龟.

这表明当时人们认为无限多个数相加的和为无穷大, 以至当时无人能驳倒他.

事实上, 当人追上乌龟时, 龟所走的距离 $S = 10 + 1 + 0.1 + 0.01 + \cdots = 11.1111\cdots$ (米).

从另一方面考虑, 由 $\dfrac{100+S}{10V} = \dfrac{S}{V}$ 可得, $S = \dfrac{100}{9} = 11\dfrac{1}{9} = 11.1111\cdots$ (米).

一般地, 若 $V_{人} = aV_{龟}$ $(a > 1)$ 通过上面两方法分别计算龟所起走的距离可得到等式: $\dfrac{100}{a} + \dfrac{100}{a^2} + \dfrac{100}{a^3} + \cdots + \dfrac{100}{a^n} + \cdots = \dfrac{100}{a-1}$.

如何解释这个等式呢? 这就要用到极限的概念及其运算.

2. 极限思想的历史渊源

我国魏晋时期杰出的数学家刘徽创立了"割圆术" (见教科书本章引言, 略), 其中体现的正是极限的思想. 并求出 $\pi \approx 3.14$, 而祖冲之在刘徽割圆术的基础上算出了 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$. 无独有偶, 也许是为了回答芝诺的诡论, 古希腊人也发现了这种思想, 把它命名为"穷竭法"(欧多克斯), 阿基米德运用它证明了球的体积与球面面积公式.

(幻灯片放映球的体积与球面面积公式的推导过程, 见教科书第二册(下), 略.)

3. 缺乏极限定义, 陷入重重危机.

尽管极根的思想由来已久, 然而在随后的漫长岁月中却没有什么进展. 欧洲文艺复兴之后, 生产力和科学技术水平都有了突飞猛进的发展. 这些发展对数学提出了新的要求, 由此产生了许多新的数学思想与数学方法, 其中最重要的发明之一就是牛顿和莱布尼茨创立的微积分学.

随着越来越多的人们对无穷数列进行求和运算, 矛盾与错误也层出不穷.

例1 求和 $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 \cdots\cdots n为奇数, \\ 0 \cdots\cdots n为偶数. \end{cases}$

然而当 $n \to \infty$ 时, 就出现了以下现象:

(1) $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$;

(2) $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1-1) + (1-1) + \cdots = 1$;

(3) $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$, 故 $S = \dfrac{1}{2}$,

所以有 $0 = 1 = \dfrac{1}{2}$.

为了解决这样的矛盾, 澄清人们对"无限"运算的认识, 就需要对极限有一个严格的定义.

4. 数列极限概念的发展

考察下面的数列:

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$;

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$;

$-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \cdots$.

上面三个数列都有这样的特性: 随着项数 n 的无限增大, 数列的项无限趋近于某个常数(学生回答: 分别是0, 1, 0), 于是有:

定义1: 如果当项数n无限增大时, 无穷数列$\{a_n\}$的项无限趋近于某个常数a, 那么就说数列$\{a_n\}$以a为极限, 或a是数列$\{a_n\}$的极限, 记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 有时也记作当$n \to \infty$时, $a_n \to a$.

例2 考察下面的数列, 写出它们的极限.

(1) $1,\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{27},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n^3},\ \cdots;$

(2) $2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{n+1}{n},\ \cdots;$

(3) $6.5, 6.95, 6.995,\ \cdots,\ 7-\dfrac{5}{10^n},\ \cdots;$

(4) $-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{9},\ -\dfrac{3}{16},\ \cdots,\ \dfrac{(-1)^n n}{(n+1)^2},\ \cdots.$

(学生回答.)

例3 (1)求常数列 $-1,\ -1,\ \cdots,\ -1$ 的极限, 即$\lim\limits_{n\to\infty}(-1) =$ ______;

(2) 若$|a|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n} =$ ______,

若$|a|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n =$ ______.

例4 (1) 下面两个数列有极限吗?

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots;$

$0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots.$

(2) 证明: 当$a>1$时,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots=\frac{1}{a-1}.$$

解: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}+\cdots$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{a^n}}{a-1}$$

$$=\frac{1}{a-1}.$$

(3) 比较$0.\dot{9}$与1的大小.

方法一: $0.\dot{9}=0.\dot{1}\times 9=\dfrac{1}{9}\times 9=1;$

方法二: $0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{9}{10}-\dfrac{9}{10^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{10}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1.$$

方法三: $|0.\dot{9}-1|$是比任何正数都小的非负数, 故只能为0.

(方法一、方法二由学生思考后给出, 方法三由教师启发分析给出.)

数学是一门讲严谨的学科, 数学语言是精确的言语. 上面数列极限的定义中"无限趋近"的提法是一种直观的动态的描述, 是否能更加严谨化呢? 历史上出现了许多解释方案, 如: "要有多近就有多近"; 考虑到两个数a_n与a的距离可以用$|a_n-a|$来表示, 就有了"$|a_n-a|$想要多小就多小(即$|a_n-a|\to 0$)"; 当n足够大时, $|a_n-a|$能小于任意给定的正数; 最后终于找到用静态的数学符号描述的方法.

定义2: 对数列$\{a_n\}$, 如果存在一个常数A, 使得对任意给定的$\varepsilon>0$, 可找到N, 使得当$n>N$时, 不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立, 就说A是$\{a_n\}$当$n\to\infty$时的极限, 即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

5. 小结与作业: 略.

补充选做作业: 你能用定义2的方法说明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$吗?

三、教后记

1. 关于教学要求. 本节课是针对我校为重点中学, 学生程度较好而设计的, 若学生程度一般, 可略去数列极限的抽象化定义部分. 即使对重点中学的学生来讲, 也不必把根据定义证明数列的极限作为普遍的要求. 而应重在体现数学思想的文化特征上.

2. 关于数学史在教学中的作用. 其一是帮助学生深入理解概念. 法国数学家庞加莱说: "动物学家坚持认为, 在一个短时期内, 动物胚胎的发育重蹈所有地质年代其祖先们的发展历史, 人的思想发展似乎也是如此. 教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历, 迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段, 鉴于此, 科学史应该是我们的指南." 其二是在情感、态度、价值观上的作用. 当我们展现的一种火热的发明过程而不仅仅是美丽的冰冷的结

(下转第9–1页)

一堂解析几何复习课的设计

226100 江苏省海门市锡类中学 江汉忠

本文以一个圆锥曲线问题为例, 重点谈谈高三数学复习课中如何做到以静制动、举一反三的问题.

案例: 已知$A(-2,\sqrt{3})$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 当$|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$取最小值时, 求点$M$的坐标.

教师点拨: 遇到焦点问题, 一般有哪些思路?

全体学生: 过M作$MQ\perp l$于Q, 由椭圆的第二定义得: $2|MF|=|MQ|$, $\therefore$ $|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MQ}|\geqslant|\overrightarrow{AQ}|\geqslant 10$, 当且仅当$A$、$M$、$Q$三点共线且$M$位于$A$、$Q$中间时取"=", 此时, $AQ\perp l$, $\therefore$ $y_M=y_A=\sqrt{3}$, $\dfrac{x_M^2}{16}+\dfrac{3}{12}=1$, $x_M=\pm 2\sqrt{3}$,

$\because$ $x_M>0$, $\therefore$ $M(2\sqrt{3},\sqrt{3})$.

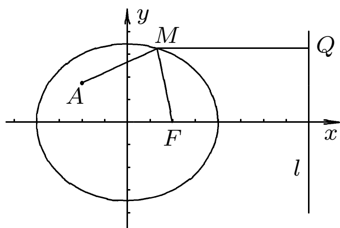


图 1

一、变动定点, 内外呼应

问题一　已知$A(-4,\sqrt{3})$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 求$|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$的最小值及取最小值时点$M$的坐标.

学生1(很快想出, 解法类同于案例): 过M作$MQ\perp l$于Q, 由椭圆的第二定义得$2|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MQ}|$, $\therefore$ $|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MQ}|\geqslant|\overrightarrow{AQ}|\geqslant 12$, 当且仅当$A$、$M$、$Q$三点共线且$M$位于$A$、$Q$中间时取"=", 此时, $AQ\perp l$, $\therefore$ $y_M=y_A=\sqrt{3}$. $\therefore$ $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{3}{12}=1\Longrightarrow x_M=\pm 2\sqrt{3}$, 即$M(\pm 2\sqrt{3},\sqrt{3})$.

教师点评: 此题设计目的是通过比较, 让学生立足通法.

问题二　已知$A(6,0)$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 求$|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$的最小值及取最小值时点$M$的坐标.

师生共同: 设$M(x,y)$, 则

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|\\=&\sqrt{(x-6)^2+y^2}+8-x\\=&\sqrt{\frac{1}{4}x^2-12x+48}+8-x,\end{aligned}$$

可以证得$|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$在$x\in[-4,4]$上是减函数, $\therefore$ 当$x=4$时, $|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$取最小值6, 此时$M(4,0)$.

教师点评:　此题设计目的是通过同种题不同方法的比较, 打破学生的思维定势.

师生回顾: 随着定点在圆锥曲线内外变动, 除了可以用第二定义外, 还考虑了利用函数的单调性. 这样既打破了学生的思维定势, 又培养了创新意识.

学生2(同类题): 已知F是双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的右焦点, 点$M$是双曲线右支上一动点, 定点$A(5,4)$, 求$4|\overrightarrow{MF}|-5|\overrightarrow{MA}|$的最大值.

(提示: 定点在圆锥曲线外, 用第二定义.)

学生3(同类题): 已知$A(2\sqrt{3},\sqrt{3})$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 当$|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|$取最小值时, 求点$M$的坐标.

(提示:定点在圆锥曲线上, 用第二定义.)

二、变动方程, 别有洞天

问题三　已知点$A(-2,\sqrt{3})$, 点F是抛物线$(y-\sqrt{3})^2=-4x$的焦点, 点M在抛物线上移动时, 求$|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|$的最大值及取最大值时点$M$的坐标.

教师: 让学生讨论2分钟, 适时提示将问题坐标化, 用函数单调性解决.

学生4: $|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|$
$=\sqrt{(x+2)^2+(y-\sqrt{3})^2}-2(-x+1)$
$=\sqrt{x^2+4}+2x-2\ (x\leqslant 0)$,

令$f(x)=\sqrt{x^2+4}+2x-2\ (x\leqslant 0)$, 则$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}+2>0$, $\therefore$ $f(x)$在$(-\infty,0]$上是增函数, $\therefore$ 当$x=0$时, $|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|$取最大值$f(0)=0$, 此时$M(0,\sqrt{3})$.

教师点评: 此题设计目的是巧妙地将解析几何问题与函数思想结合在一起, 提高灵活解题的能力.

师生回顾: 函数思想尤其导数法的引入给解决解析几何问题注入了新的活力, 拓宽了思维.

学生5(同类题): 已知点$A(-2,\sqrt{3})$, 点F是抛物线$(y-\sqrt{3})^2=-4x$的焦点, 点M在抛物上移动时, 求$|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF}|$的最小值及取最小值时点$M$的坐标.

(提示: 问题坐标化, 用函数单调性解决.)

学生6(同类题): 已知点F是双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$是双曲线左支上的一动点, 定点$A(-6,0)$, 当$|\overrightarrow{MF}|-|\overrightarrow{MA}|$取最大值时, 求点$M$的坐标.

(提示: 问题坐标化, 用函数单调性解决.)

三、变动结论, 大相径庭

问题四　已知$A(-2,\sqrt{3})$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 求$|\overrightarrow{MF}|+|\overrightarrow{MA}|$的最小值及取最小值时点$M$的坐标.

学生7(马上回答): 与问题一一样, 用椭圆的第二定义.

教师: 让学生做2分钟, 发现不行, 再引导.

学生8: 由椭圆的第一定义$|\overrightarrow{MF}|+|\overrightarrow{MF_1}|=8$得 $|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MF}|=8+|\overrightarrow{MA}|-|\overrightarrow{MF_1}|\geqslant 8-|\overrightarrow{AF_1}|=8-\sqrt{3}$, 当且仅当$A$、$M$、$F_1$三点共线且$M$位于$A$、$F_1$一侧时取“=”, 此时$AF_1$的方程是$x=-2$, $\therefore$ $M(-2,2\sqrt{3})$.

教师点评: 此题设计目的是通过辨析, 揭示同类不同题之间的联系与区别, 培养学生处理问题的应变能力.

学生9(同类题): 椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$内有一点$A(1,2)$, F是椭圆的左焦点, 点M在椭圆上移动, 若$|\overrightarrow{MF}|+|\overrightarrow{MA}|$的最小值、最大值分别为$d_1$、$d_2$, 则$d_1+d_2$值为……………………(　)

(A) 12;　(B) $4\sqrt{5}$;　(C) 8;　(D) $2\sqrt{3}$.

(提示: 利用椭圆的第一定义.)

问题五　已知$A(-2,\sqrt{3})$, F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 求$|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|$的最小值及取最小值时点$M$的坐标.

教师引导: 让学生思考2分钟, 发现单独用第一、第二定义不行, 能否将第一、第二定义合而用之呢?

全体学生: 过M作左准线l的垂线于Q_1, 由椭圆的第二定义得 $2|\overrightarrow{MF_1}|=|\overrightarrow{MQ_1}|$, 由椭圆的第一定义得 $|\overrightarrow{MF}|+|\overrightarrow{MF_1}|=8$,

$\therefore$ $|\overrightarrow{MA}|-2|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MA}|+2|\overrightarrow{MF_1}|-16$
$=|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MQ_1}|-16$
$\geqslant|\overrightarrow{Q_1A}|-16=-10$,

当且仅当A、M、Q_1三点共线且M位于A、Q_1中间时取“=”. 此时, $AQ_1\perp l$, $\therefore$ $y_M=y_A=\sqrt{3}$, $\therefore$ $\dfrac{x_M^2}{16}+\dfrac{3}{12}=1\Longrightarrow x_M=\pm 2\sqrt{3}$, $\because$ $x_M<0$, $\therefore$ $M(-2\sqrt{3},\sqrt{3})$.

教师评价: 本题实际是对上述问题的综合运用, 本题揭示了各种方法在处理问题时的和谐统一.

问题六　已知定点$A(-4,\sqrt{3})$, 定点F是椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$的右焦点, 点$M$在椭圆上移动, 求$|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MF}|$的最小值.

(下转第9–38页)

从一道勾股定理习题的解法谈反思性学习

325000 浙江省温州外国语学校 曾小豆

怎样在数学课堂中引导学生进行解题后的反思性学习呢? 下面, 请看笔者经历的一个教学片段, 内容是北师大版八年级上册“勾股定理”这章内容后的一节习题课.

问题: 有几根细木条, 长度分别为30厘米和40厘米, 现有一个同学要制作一个钝角三角形和一个锐角三角形, 要制作这样两种三角形, 第三根木条长度应分别如何取?

提出问题后, 不少学生很快就给出了解答: 设第三根木条长度为x厘米.

(1) 当$10 < x < 50$时, 三角形是锐角三角形;

(2) 当$50 < x < 70$时, 三角形是钝角三角形.

全班41人共有32人给出了上述的答案. 笔者请这些同学发表自己的想法, 学生指出: 如果能够构成一个三角形, x的取值范围是$10 < x < 70$, 而当$x = 50$时, 三角形是直角三角形.

有两位学生提出了不同的看法: 答案(1)不对, 应该为$10 < x < 50$且$x \neq \sqrt{700}$, 因为当$x = \sqrt{700}$时, 三角形为直角三角形.

此时, 课堂一下子热闹起来, 经过长时间的探讨,有一位学生提出: 刚才两位同学的答案还不够全面.

这位学生非常自信地答道: “当$10 < x < 50$且$x \neq \sqrt{700}$时, 随着x取不同的值时, 还会出现锐角三角形和钝角三角形的情形. 即当$10 < x < \sqrt{700}$时是钝角三角形; 当$\sqrt{700} < x < 50$时是锐角三角形; 当$50 < x < 70$时是钝角三角形.”

笔者乘机引导学生把这个问题的解答进行整理, 部分学生整理的结果让笔者十分高兴. 他们整理的结果是:

当三角形是直角三角形时, $x = \sqrt{700}$或50. 如图1, 由数轴可知:

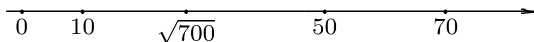


图 1

当$10 < x < \sqrt{700}$时, 三角形是钝角三角形;

当$\sqrt{700} < x < 50$时, 三角形是锐角三角形;

当$50 < x < 70$时, 三角形是钝角三角形.

忽然又有一位学生举手发言: “老师, 当$50 < x < 70$时, 随着x的变化, 会不会也出现锐角三角形和钝角三角形呢?” 马上有学生进行了如下的反驳:

学生1: “不可能的. 因为当$50 < x < 70$时第三根细棒是作为三角形最长边的, x不论怎样取都是钝角三角形, 不相信你可以自己画图来观察.”

学生2: “如图2, 把AB边固定, AC绕A点顺时针运动, BC的长度会随AC的运动而增大的, 三角形仍然是钝角三角形.”

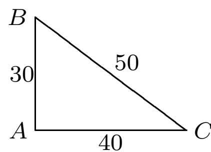


图 2

问题解决了, 学生露出了满意的笑容.

教师: “大家能否从刚才这位同学的解释中得到什么启示呢?”

教室里安静下来了, 不一会儿有学生发言了.

学生3: “这个问题的解决, 其实就是找C点, 而C点到A点的距离为40厘米是不变的, 我总感觉到有什么规律似的.”

学生4: “如果让C点运动起来, $\triangle ABC$的形状也会随着C点位置变化而变化的.”

学生5: “老师, 我找到C点运动的规律了, 它是在一个圆上.”

……

课堂上出现了笔者备课时并没有考虑的现象, 课堂再次掀起高潮, 随着这个契机的到来, 笔者大胆将了学生一军: “你们能否将这个问题放在圆上来解决呢?”

面临新的挑战, 学生七嘴八舌地议论开了. 学生又得到另一种解答方法:

如图3, $\triangle ABC$中, $AB=30$厘米, $AC=40$厘米, 以A为圆心, 40厘米长为半径画圆A. 问题化归为当$\triangle ABC$是锐角或钝角三角形时分别求第三根木棒BC长度范围, 即确定三角形的第三个顶点C在圆A上的位置. 由于$\triangle ABC$的三个顶点不在同一直线上, 所以圆周上点H、I要除去, 其余任意一点都可以与点A、B构成一个三角形, 其中当点C运动到点E、F、M、N时, 即$BC=50$或$\sqrt{700}$, $\triangle ABC$是直角三角形. 观察图3得:

当点C在$\overset{\frown}{MIN}$和$\overset{\frown}{EHF}$上(点M、N、E、F、H、I除外)时, 即$10<BC<\sqrt{700}$或$50<BC<70$, $\triangle ABC$是钝角三角形.

当点C在$\overset{\frown}{FN}$和$\overset{\frown}{EM}$上(点M、N、E、F除外)时, 即$\sqrt{700}<BC<50$, $\triangle ABC$是锐角三角形.

图 3

下课后, 笔者与学生谈起今天上课的感觉如何, 他们说:“这才叫学数学, 要是天天这样上数学课就好了!”这就是学生的心声, 同时, 也给笔者带来了深刻的反思.

1. 错因探究

在41位学生中共有32位学生给出一样的错误解答. 原因主要有以下三种情况: (1)认为三角形的第三边就是三角形的最长的边, 忽视它也可能是三角形的次长边或最短边; (2)思考问题凭直觉, 觉得当$50<x<70$时, 三角形是钝角三角形, 反之必然是锐角三角形; (3)受直角三角形边长30厘米、40厘米、50厘米特殊性的定势影响. 笔者还了解到, 学生解题后基本上没有反思的习惯, 而且大部分学生认为数学问题解决的答案就是问题的终结. 可见, 出现这样集体性错误必有教师教学措施不当等原因, 如教学中不重视解题后的反思性学习的习惯的培养, 导致了学生的解题过多地依赖于教师的指导, 学生解题能力的提高受到了阻碍.

2. 思维暴露

从教学实例中可以看到从问题的提出到对问题解决的质疑、再发现、再认识和对问题解决的引申, 都应给学生充分展示思维过程的机会. 当然, 让学生充分暴露其思维过程, 教师应当给学生以时间和空间, 而教师思维的暴露应当体现在教学设计过程的引导中, 它是课堂教学的指挥棒, 要引导学生迅速抓住问题的本质特征, 使思维不断深入发展和完善.

3. 角色转换

教师在学生心中总是扮演着一个无所不知的完美角色, 其实教师在备课或教学过程中也常有疏忽的时候, 有对问题的分析不够全面的时候. 既然如此, 课堂上为什么不可以把自己失败的方法, 思维的误区设计成教学材料展示给学生呢? 这样, 往往会激起学生对问题思索的好奇心, 激发学生对问题解决后的反思的主动性.

4. 善待错误

笔者在课前准备这个问题时, 与学生犯了同样的错误, 在授课过程中才发现了这个错误. 让笔者深深感到在数学教学过程中不仅要教知识, 让学生学会解决问题, 更重要的是学会在数学问题解决中进行反思. 如问题解决后反思: 这种解法正确吗? 有没有其他方法? 是否有更

好题是从哪里来的?

200062 上海市曹杨二中 黄 坪

已知真命题: 过双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$左焦点的直线与双曲线交于$A$、$B$两点, 若$|AB|=6$, 则这样的直线恰好有3条, 将此命题推广到一般双曲线, 并使已知命题成为推广了的命题的特例.

这是平时训练中一道填空小题, 没想到学生有如下的思考:

对一般的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$.

思考1: 将$|AB|=6$, 推广到$|AB|=2a$;

思考2: 将$|AB|=6$, 推广到$|AB|=a^2-b^2$;

思考3: 将$|AB|=6$, 推广到$|AB|=\frac{a^2+b^2}{2}$;

思考4: 将$|AB|=6$, 推广到$|AB|=2b^2$;

思考5: 将$|AB|=6$, 推广到$|AB|=\frac{2a^2}{b^2}$;

这是学生练习中出现过的几种情况, 仿照学生只是从特例出发的类比推理思考方式, 那么只要抓住3、6、9三个数据的相等关系, 视$9=a^2$, $3=b^2$, 就可以得到一种推广, 又如$|AB|=a+b^2$, $|AB|=2a^2-4b^2$, $|AB|=3a-b^2$, $|AB|=\sqrt{3(a^2+b^2)}$, $|AB|=\sqrt{6(a^2-b^2)}$, 等等. 那么到底哪一种推广是正确的呢?

上面的五种典型思考, 都是有问题的. 本题的实质是要考虑过左焦点的直线与双曲线不同两支相交的最短弦长$2a$和同一左支相交的最短弦长$\frac{2b^2}{a}$的大小比较.

当$2a>\frac{2b^2}{a}$时, 即在思考1的基础上再加注条件$a>b$时, 就可得到推广1.

当$2a=a^2-b^2>\frac{2b^2}{a}$时, 即在思考2的基础上再加注条件$b^2=a^2-2a$, $a>2$时, 就可得到推广2.

当$2a=\frac{a^2+b^2}{2}>\frac{2b^2}{a}$时, 即在思考3的基础上再加注条件$b^2=4a-a^2$, $2<a<4$时, 就可得到推广3.

当$2a=2b^2>\frac{2b^2}{a}$时, 即在思考4的基础上再加注条件$a=b^2$, $b>1$时, 就可得到推广4.

当$2a=\frac{2a^2}{b^2}>\frac{2b^2}{a}$时, 即在思考5的基础上再加注条件$a=b^2$,$b>1$时, 就可得到推广5.

按照这样的研究, 我们可以得到很多种不同的推广, 但不管怎样的推广, 都离不开讨论两个最短弦的关系.

好的方法? 这种方法能否用于解决其他问题? 能否推广、引申? 解题未成功的原因何在? 它与其他问题解决有关吗? 等等. 因此, 善待学生的错误不仅能提高学生的解题能力, 而且也能提高教师的教学水准.

5. 事件应对

教学中我们经常会遇到一些意外情况, 如学生创造性发问、学生奇特的错误、教师讲授的“卡壳”等, 这要求教师做出快速反应和采取果断决策. 在平时教研实际活动中, 如果经常对这样的教学案例进行分析、反思和总结, 将有助于我们提高对新课程的教育和教学理念的把握.

参考文献

1. 涂荣豹. 试论反思性数学学习. 数学教育学报. 2000. 4.

扶持和培养学生的数学想象力

215128 江苏省苏州市苏苑高级中学 张国棣

天鹅在小池塘里是飞不起来的, 不是因为它们断了翅膀, 而是因为缺少起飞所必需的振翅滑水的距离, 这种现象值得我们深思, 学生的学习需要有丰富的想象力, 想象的过程就像天鹅振翅滑水的过程, 只有不断地想象, 才能有思维上的飞跃. 所以, 首先要扶持和培养学生的想象力.

那么, 我们在教学中, 是否已经习惯于学生的接受、记忆、模仿和练习, 满足于学生记住一个概念、会做一个题? 相当一部分学生是否也喜欢做忠实的听众, 缺少必需的想象力? 当学生有了一定的想象力, 敢于提出新的问题的时候, 我们是抑制了学生的想象力, 还是鼓励学生大胆地想象? 当学生敢于大胆想象的时候, 我们又有多少次是有意或无意地阻止了学生的想象? 无论老师备课多么认真多么充分, 在“师生互动”的课堂上, 总有学生大胆想象, 提出了老师课前想不到的问题, 是打断学生的想象, 还是和学生一起探究想象的问题? 如在一节高三复习课上, 老师准备用一题多解的开放视角引导学生探索如下的问题:

已知: $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$, 求证: $\dfrac{1}{1-a^2}+\dfrac{1}{1-b^2} \geqslant \dfrac{2}{1-ab}$.

在教师的点评帮助下, 学生给出了四种不同的证法: 作差比较法、综合法、分析法、三角换元法. 教师对此感到满意, 也潜意识认为没有其它证法了. 当有的学生还想说出他们的想

当 $2a > \dfrac{2b^2}{a}$, 即当 $a > b$ 时, 过左焦点弦长等于 $2a$ 的直线恰有三条;

当 $a = b$ 时, 过左焦点弦长等于 $2a$ 的直线恰有两条;

当 $a < b$ 时, 过左焦点弦长等于 $2a$ 的直线恰有一条.

进一步探索得到:

当 $a > b$ 时, 过左焦点弦长 $|AB| > 2a$ 的直线恰有四条, 过左焦点弦长 $|AB|$, $\dfrac{2b^2}{a} < |AB| < 2a$ 的直线恰有两条, 过左焦点弦长 $|AB| = \dfrac{2b^2}{a} < 2a$ 的直线恰有一条, 过左焦点弦长 $|AB| < \dfrac{2b^2}{a} < 2a$ 的直线不存在;

当 $a = b$ 时, 过左焦点弦长 $|AB| > 2a$ 的直线恰有四条, 过左焦点弦长 $|AB| < 2a$ 的直线不存在;

当 $a < b$ 时, 过左焦点弦长 $|AB| > \dfrac{2b^2}{a} > 2a$ 的直线恰有四条, 过左焦点弦长 $|AB| = \dfrac{2b^2}{a} > 2a$ 的直线恰有三条, 过左焦点弦长 $|AB|$, $2a < |AB| < \dfrac{2b^2}{a}$ 的直线恰有两条, 过左焦点弦长 $|AB| < 2a$ 的直线不存在.

从这个角度来说, 本小题所隐含的数形结合的思想和方法是十分浓厚的, 从特例出发的推广空间非常宽阔, 可以让学生通过一定的联想, 利用类比推理的思维方式, 得到形式多样的不同命题, 因此, 这是一道值得思考和探索的好题.

只要我们处处留心, 关注学生的思考, 认真分析学生的错误原因, 我们就可以从平常忽视的问题中找到一道又一道的好题, 使数学的学习不仅仅只是知识的学习, 更成为饶有兴趣的知识探索性学习, 也只有这样的学习, 数学的学习才有巨大的潜力和生命力. 从这层意义上来说, 真正的好题来自我们自己的发现.

法时, 被老师友善地制止了, 认为没有探索的必要.

课后, 这两个学生带着得意和委屈给老师展示了他们的新探究.

探究1: $\because\ \dfrac{1}{1-a^2}=1+a^2+a^4+a^6+\cdots$,

$\because\ \dfrac{1}{1-b^2}=1+b^2+b^4+b^6+\cdots$,

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\\=\ &2+(a^2+b^2)+(a^4+b^4)\\&+(a^6+b^6)+\cdots\\\geqslant\ &2+2ab+2a^2b^2+2a^3b^3+\cdots\\=\ &2(1+ab+a^2b^2+a^3b^3+\cdots)\\=\ &\frac{2}{1-ab},\end{aligned}$$

用无穷等比数列的和的公式来证明不等式本身就是一种创新, 应该说思维非常巧妙.

探究2: 不等式条件可加强为 $0\leqslant a$、$b<1$.

设 $\overrightarrow{x_1}=(1,a)$, $\overrightarrow{x_2}=(1,-a)$, $\overrightarrow{y_1}=(1,b)$, $\overrightarrow{y_2}=(1,-b)$, 则 $|\overrightarrow{x_1}|=|\overrightarrow{x_2}|$, $|\overrightarrow{y_1}|=|\overrightarrow{y_2}|$,

$\therefore 1-a^2=\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_2}$, $1-b^2=\overrightarrow{y_1}\cdot\overrightarrow{y_2}$, $1-ab=\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{y_2}$,

设 $\overrightarrow{x_1}$ 与 x 轴夹角为 θ_1, $\overrightarrow{y_1}$ 与 x 轴夹角为 θ_2, 则有 $0\leqslant\theta_1$、$\theta_2<\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}&\therefore\ \overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_2}=|\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1,\\&\overrightarrow{y_1}\cdot\overrightarrow{y_2}=|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2,\\&\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{y_2}=|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_2}|\cos(\theta_1+\theta_2),\\&\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\\&=\frac{1}{|\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1}+\frac{1}{|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2}\\&=\frac{|\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1+|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2}{|\overrightarrow{x_1}|^2\,|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2},\\&\frac{1}{1-ab}=\frac{1}{|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_1}|\cos(\theta_1+\theta_2)}.\end{aligned}$$

$\therefore$ 只要证明

$$\frac{|\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1+|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2}{|\overrightarrow{x_1}|^2\,|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}\geqslant\frac{2}{|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_2}|\cos(\theta_1+\theta_2)},$$

即证明 $|\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1+|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2\geqslant\dfrac{2\,|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_1}|\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}{\cos(\theta_1+\theta_2)}$.

$\because\ |\overrightarrow{x_1}|^2\cos 2\theta_1+|\overrightarrow{y_1}|^2\cos 2\theta_2\geqslant 2\,|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_1}|\sqrt{\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}$,

$\therefore$ 只要证明

$$2\,|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_1}|\sqrt{\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}\geqslant\frac{2\,|\overrightarrow{x_1}|\,|\overrightarrow{y_1}|\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}{\cos(\theta_1+\theta_2)},$$

即证明 $\cos(\theta_1+\theta_2)\geqslant\sqrt{\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2}$,

即证明 $\cos^2(\theta_1+\theta_2)\geqslant\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2$,

即证明

$$1+\cos(2\theta_1+2\theta_2)\geqslant 2\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2,$$

即证明

$$1+\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2-\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\geqslant 2\cos 2\theta_1\cos 2\theta_2,$$

即证明 $1\geqslant\cos(2\theta_1-2\theta_2)$, 得证.

用向量来证明不等式, 也是方法上的创新. 这两种证法都体现了学生的大胆想象力、探究精神和解题机智. 试想, 如果学生听了老师的话不再继续探究, 能有这样的结果吗? 一个懂得如何学习的学生, 在课堂上的想象力是非常丰富的, 一个好的老师也应该懂得怎样扶持和保护学生的想象力. 有时候, 学生的想象力可能是"天马行空", 甚至是荒诞的, 这时候老师还要注意引导: 解题是否浪费了重要的信息? 能否开辟新的解题通道? 解题多走了哪些思维回路? 思维、运算能否变得简洁? 是否拘泥于思维定势照搬了熟悉的解法? 能否有方法的创新? 能否对问题蕴含的知识进行纵向深入地探究, 梳理知识的系统性? 能否加强知识的横向联系, 把问题所蕴含孤立的知识"点", 扩展到系统的知识"面"? 为什么有这样的问题, 它和哪些问题有联系? 能否受这个问题的启发, 得到一些重要的结果, 有规律性的发现? 能否形成独到的新见解, 有自己的小发明? 等等. 通过不断地想象, 让学生的思维能够持续飞翔.

如在一节多面体复习课上, 老师给出了这样的问题: (1992年高考, 理(9)) 在四棱锥的四个侧面中, 直角三角形最多可有 ……………(　)

(A) 1个;　(B) 2个;　(C) 3个;　(D) 4个.

答: 选(D).

此题解答之后, 一个学生马上提问:"老师, 五棱锥和六棱锥的侧面最多有几个直角三角形? 这类问题有规律吗?". 应该说学生的这种想象是非常及时、合理的.

这个问题笔者课前并没有研究过, 面对突如其来的发问有点"懵", 是用"不需要研究"等话给搪塞过去, 还是和学生一起探究? 如果选择了前者, 那么, 下次他还敢大胆想象、大胆提问吗? 联想到这可能是多面体的"直度"问题, 尽管老师心里没底, 但还是和学生一起进行了探究, 以保护学生的想象力.

首先, 给出多面体"直度"的定义: 多面体的所有面中, 直角三角形面的个数与总面数之比称为多面体的直度.

探究1: 凸四面体的直度的最大值等于1.

证明: 构造如图1的凸四面体$A-BCD$, 使$CD\perp BC$, $AB\perp$面BCD.

图 1

$\because$ $AB\perp$面BCD,

$\therefore$ $AB\perp CD$.

又$CD\perp BC$,

$\therefore$ $CD\perp$面ABC, $\therefore$ $CD\perp AC$.

即此凸四面体的四个面均为直角三角形, 直度为1.

探究2: 凸五面体的直度的最大值等于$\dfrac{4}{5}$.

引理: 若一个凸n面体的每个面都是三角形, 则面数n是偶数.

证明: 设n面体的每个面都是三角形, 由欧拉公式得$V+F-E=2$, 且$3F=2E$,

$\therefore$ $V-\dfrac{1}{2}F=2$,

$\therefore$ F必为偶数, 即面数n为偶数.

由引理和原问题可知此结论为真.

探究3: 当n是奇数时, 凸n面体的直度的最大值等于$\dfrac{n-1}{n}$.

分析: 当n是奇数时, 由引理1, 凸n面体的n个面不可能都是三角形, 直度不等于1. 下面, 只要找到一个直度等于$\dfrac{n-1}{n}$的凸多面体就可以了.

图 2

如图2, 在平面M内取一点O, 过O作射线OA_1、OA_{n-2}, 使$\angle A_1OA_{n-2}=\alpha\,(0<\alpha<90^\circ,\ n\geqslant 4)$. 作射线$OA_2, OA_3, \cdots, OA_{n-3}$, 将$\angle A_1OA_{n-2}$分成$n-3$等份. 在$OA_1$上取一点$B_1$, 设$OB_1=a$, 过$B_1$作$B_1B_2$垂直$OA_2$于$B_2, \cdots$, 过$B_{n-3}$作$B_{n-3}B_{n-2}$垂直$OA_{n-2}$于$B_{n-2}$, 易知

$OB_2=a\cos\dfrac{\alpha}{n-3}, \cdots,$

$OB_{n-2}=a\cos^{(n-3)}\dfrac{\alpha}{n-3},$

$\angle B_1B_2B_3=\angle B_2B_3B_4=\cdots$

$=\angle B_{n-4}B_{n-3}B_{n-2}=180^\circ-\dfrac{\alpha}{n-3},$

所以多边形$OB_1B_2\cdots B_{n-2}$为凸$n-1$边形.

作$PO\perp$平面M, 连结PB_1, PB_2, $\cdots$, PB_{n-2},

$\therefore$ $\triangle POB_1$、$\triangle POB_{n-2}$为直角三角形.

又$\because$ $B_1B_2\perp OB_2$,

$\therefore$ $B_1B_2\perp PB_2$,

$\therefore$ $\triangle PB_1B_2$为直角三角形.

同理可证: $\triangle PB_2B_3$、$\cdots$、$\triangle PB_{n-3}B_{n-2}$均为直角三角形.

所以, 凸n面体$P-B_1B_2\cdots B_{n-2}$有$n-1$个面是直角三角形, 即此凸n面体的直度的最大值为$\dfrac{n-1}{n}$.

探究4: n是偶数时, 凸n面体的直度的最大值等于1.

探究中未能构造出满足条件的凸n面体.

总之, 课堂上老师要极力保护和扶持学生的想象力, 使学生由忠实的听众转变为问题的发现者.

关联数列的数表问题

152000 黑龙江省绥化市第一中学 王太东 张亚萍 绥化市第六中学 赵兴凤

近年来“数表问题”如一颗璀璨的“明珠”，频频出现在国内外的数学联赛、中、高考试卷上，它与数列知识联手，奏出一曲曲优美的“乐章”．所谓“数表”就是满足一定条件的数，按一定规律排成的一个表，这类问题题型灵活，学生有兴趣，低、中、高档题均可出现，故成为命题专家们的“新宠”．下面就关联数列的数表问题进行分类探究．

一、求数表所暗示的规律(即通项公式)

例1　德国数学家莱布尼兹发现了下面的单位分数三角形(单位分数是分子为1，分母为正整数的分数)，称为莱布尼兹三角形：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \frac{1}{1} & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\ & & \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots & & \end{array}$$

根据前5行的规律第6行的数依次是____．

解：表中每个数字都是其两脚的数字和，故第6行的数依次为$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{30}$、$\frac{1}{60}$、$\frac{1}{60}$、$\frac{1}{30}$、$\frac{1}{6}$．

例2　(1979年吉林省竞赛题改编)下面的数表

$$1=1$$
$$3+5=8$$
$$7+9+11=27$$
$$13+15+17+19=64$$
$$21+23+25+27+29=125$$

所暗示的一般规律是______．

解：设第n行左边第一个数为a_n，则$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$．

叠加得$a_n=n^2-n+1$，而第n行等式左边是n个奇数的和，故第n行所暗示的一般规律是：

$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots$$
$$+[n^2-n+(2n-1)]=n^3.$$

二、探求表中指定的某些项

例3　能够在如下表所示的5×5正方形的25个空格中填入正整数，使得每一行、每一列都成等差数列，问填进标有$*$号的空格的数必须是多少？

			*	
	74			
$2y$				186
y		103		
0	x	$2x$		

解：记a_{ij}为从上至下第i行、从左至右第j列的格所填的数，则有$a_{52}=x$，$a_{41}=y$．由第3行得

$a_{33}=\dfrac{2y+186}{2}$，由第3列得，

$a_{33}=2\times103-2x$，$\therefore 2x+y=113$．

由第2行得$a_{23}=2\times74-3y$，由第3列得$a_{23}=2a_{33}-103=3\times103-4x$，

$\therefore 148-3y=3\times103-4x$，解得$x=50$，$y=13$，

所以，$a_{15}=2\times186-a_{55}=2\times186-4x=172$，$a_{13}=2a_{33}-a_{53}=112$，$a_{14}=\dfrac{a_{13}+a_{15}}{2}=142$，故标有$*$号的空格应填142．

例4　全体正奇数排成下表

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 3 & & 5 & \\ 7 & & 9 & & 11 \\ 13 & 15 & & 17 & 19 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

其构成规律是：第n行恰有n个连续奇数；从第二行起，每一行第一个数与上一行最后一个数是相邻奇数，问2005是第几行的第几个数？

解: n行共有$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$个奇数, 因此, 第$n$行的最后一个数是

$2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-1=n^2+n-1.$

从而第n行的第一个数是$(n^2+n-1)-2(n-1)=n^2-n+1$.

令$n^2-n+1<2005<n^2+n-1$.

解得$n=45$, $n^2-n+1=1981$.

设2005是第45行第m个数,

则$2005=1981+(m-1)\times 2$, $m=13$.

故2005是表中第45行第13个数.

三、探求数表中所有项的和

例5　在杨辉三角形中从上往下共有n($n\in\mathbf{N}^*$)行中非1的数字之和是____.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & &
\end{array}$$

解: 第1行数字和为1, 第2行数字和为2, 第3行数字和为4,$\cdots\cdots$,第n行数字和为2^{n-1}, 故所有数字和$S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$.

数表里共有$2n-1$个1, 故非1的数字和为$2^n-1-(2n-1)=2^n-2n$.

四、探求数表中指定项的和

例6　(1990年全国高中数学联赛试题)n^2($n\geqslant 4$)个正数排成n行n列:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

其中第1行的数成等差数列, 每一列的数成等比数列, 并且所有公比相等, 已知$a_{24}=1$, $a_{42}=\dfrac{1}{8}$, $a_{43}=\dfrac{3}{16}$,

求$a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.

解: 设第1行的公差为d, 各列公比为q. a_{1k}是第1行的第k个数, 则$a_{1k}=a_{11}+(k-1)d$.

$$\left.\begin{array}{r}
a_{24}=a_{14}q=(a_{11}+3d)q=1\\
a_{42}=a_{12}q^3=(a_{11}+d)q^3=\dfrac{1}{8}\\
a_{43}=a_{13}q^3=(a_{11}+2d)q^3=\dfrac{3}{16}
\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow a_{11}=d=q=\dfrac{1}{2}$(舍去负解).

$$a_{kk}=[a_{11}+(k-1)d]q^{k-1}=\frac{k}{2^k},$$

故 $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$,

$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n+1}}$.

以上两式相减得:

$S=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$.

点拨: 求和需研究a_{11}和a_{kk}, 又每一列成等比数列且公比相等, 只需研究a_{1k}和q, 又第1行成等差数列, 需要求得a_{11}和第1行的公差d, 因而本题要利用已知信息建立a_{11}、d和q之间的联系. 解题之前要通过分析找出需要建立几个方程, 做到心中有数, 也就是要作好解题前的准备工作, 这是正确解题的前提.

五、构造数表探求通项

例7　设$S_n^{(1)}=1+2+3+\cdots+n$, $S_n^{(2)}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, 已知$S_n^{(1)}=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 构造数表探求$S_n^{(2)}$的一般公式.

解: 容易算出$S_1^{(1)}=1$, $S_2^{(1)}=3$, $S_3^{(1)}=6$, $S_4^{(1)}=10$, $S_5^{(1)}=15$, $\cdots$;

$S_1^{(2)}=1$, $S_2^{(2)}=5$, $S_3^{(2)}=14$, $S_4^{(2)}=30$, $S_5^{(2)}=55$, $\cdots$;

将$S_n^{(2)}$和$S_n^{(1)}$的对应项相除, 可列出下表

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$S_n^{(2)}$	1	5	14	30	55	91	140	$\cdots$
$S_n^{(1)}$	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$
$\dfrac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}}$	1	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{7}{3}$	3	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{13}{3}$	5	$\cdots$

$\dfrac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}}$的项有的是分数, 有的是整数, 但4个分数的分母都是3, 因此, 将表中最后一行中的比值改写为分母都为3的分数, 得

$\dfrac{3}{3}$、$\dfrac{5}{3}$、$\dfrac{7}{3}$、$\dfrac{9}{3}$、$\dfrac{11}{3}$、$\dfrac{13}{3}$、$\dfrac{15}{3}$, 明显可以看出, 分子构成一等差数列, 分子的首项为3,

公差为2, 因此猜想 $\dfrac{S_n^{(2)}}{S_n^{(1)}}=\dfrac{2n+1}{3}$, 而已知 $S_n^{(1)}=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

$\therefore S_n^{(2)}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明: 用叠加法, 利用恒等式 $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$, 令 $x=1,2,\cdots,n$, 叠加得 $(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$,

再利用 $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 即可解出 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

点拨: 本题是借助类比法解题的典型例子, 关于寻找数列各项"形"上的特点, 发现规律进而求出和的通项.

六、构造数表求和

例8　求和 $S_n=n\times1+(n-1)\times3+(n-2)\times5+\cdots+1\times(2n-1)$.

解: S_n 中各项可依次看作1个n, 3个$n-1$, $\cdots$, $2n-1$个1, 以下为当$n=5$时所构造的数表.

```
1  1  1  1  1  1  1  1  1
   2  2  2  2  2  2  2
      3  3  3  3  3
         4  4  4
            5
```

此表可重新排列如下: 将每个"V"形槽线上的数字"放平"可得下表

```
            1
         1  2  1
      1  2  3  2  1
   1  2  3  4  3  2  1
1  2  3  4  5  4  3  2  1
…  …  …  …  …  …  …
```

易知新数表中各行之和为平方数.

一般地, 由S_n构造的数表通过上述方法变换得到的新数表的各行之和都是平方数.

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2,$$

$$\therefore S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

七、关联数表、数列的综合题

例9　(2004年北京春季高考题)下表给出一个"等差数阵":

4	7	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$
7	12	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{3j}	$\cdots$
( )	( )	( )	( )	( )	$\cdots$	a_{4j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

其中每行、每列都是等差数列, a_{ij}表示位于第i行第j列的数.

(I)写出a_{45}的值;

(Ⅱ)写出a_{ij}的计算公式;

(Ⅲ)(文)写出2008这个数在等差数阵中所在的一个位置;

(理)证明: 正整数N在该等差数列中的充要条件是$2N+1$可以分解成两个不是1的正整数之积.

解: (I) $a_{45}=49$.

(Ⅱ)该等差数阵的第1行是首项为4, 公差为3的等差数列, $a_{1j}=4+3(j-1)$.

第2行是首项为7, 公差为5的等差数列, $a_{2j}=7+5(j-1)$,

$\cdots$

第i行是首项为$4+3(i-1)$, 公差为$2i+1$的等差数列, 因此

$$a_{ij}=4+3(i-1)+(2i+1)(j-1)=2ij+i+j=i(2j+1)+j.$$

(Ⅲ)(文)要找2008在该等差数阵中的位置, 也就是要找正整数i、j使得

$2ij+i+j=2008$, 所以 $j=\dfrac{2008-i}{2i+1}$,

当$i=1$时, 得$j=669$.

所以, 2008在等差数阵中的一个位置是第1行第669列.

(理)必要性:若N在该等差数阵中,则存在正整数i、j, 使得$N=i(2j+1)+j$,

从而 $2N+1=2i(2j+1)+2j+1=(2i+1)(2j+1)$,

即正整数$2N+1$可以分解成两个不是1的正整数之积.

纳米材料制作中的一个数学课题

100085 航天科技集团科委701所 何泰来

在用纳米技术制作某种蜂窝状的新型材料时，要使其中充满直径为1纳米的圆球形小孔，这些小孔一层一层呈紧密均匀排列. 该材料的制作工艺大致如下. 选择极易腐蚀的纳米小球，在容器中，用电子控制技术将其由底部向上逐层整齐紧密排列，然后注入材料填满全部缝隙，待材料成型后把所有纳米小球腐蚀掉，形成小孔，这样就制成了这种蜂窝状的纳米技术材料.

问题是在制作前需要计算在单位体积内所需原材料的比例. 由于制作后材料内部充满的是纳米小孔，其尺度极小，所以材料边缘的特殊性可以忽略不计.

显然由于所有小球是紧密排列的，每层小球的球心都在同一水平面内，这样问题就转化为寻找出一个基本的计算单元，然后计算这个单元的体积以及此单元中所含小球部分合成的体积，两者之差即为所需材料之体积，再与单元体积相比，即可得单位体积所需原材料之比.

从图1可以看出，对于每层来说，以每三个相邻球的球心为顶点的三角形均为正三角形，如$\triangle ABC$、$\triangle ACD$，其边长均为小球的直径，而其上层球的球心则落在下层一个正三角形的中心点之上. 这样就可以把下层四个球的球心所组成的菱形$ABCD$与上层四个球的球心所组成的菱形$EFGH$构成一个斜棱柱，整个空间都可由这些斜棱柱所充满，因此这种斜棱柱就是要寻找的基本计算单元. 每个斜棱柱都包含上下两层各半个球的体积，也就是一个完整球的体积，所以材料的体积就是斜棱柱的体积与球体积之差.

设球的半径为r，则菱形$ABCD$两对边之距为$\sqrt{3}r$，菱形$ABCD$的面积为$2\sqrt{3}r^2$.

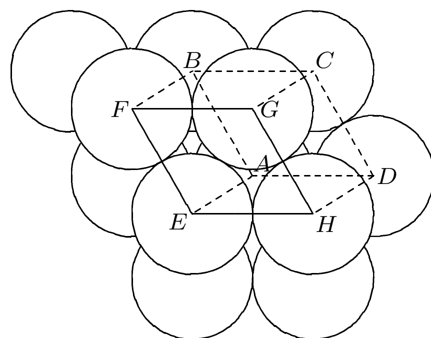


图 1

斜棱柱中两平行平面$ABCD$、$EFGH$之间距离为图2中正四面体$ABCG$的高，即为$\frac{2}{3}\sqrt{6}r$.

因此，斜棱柱的体积为$4\sqrt{2}r^3$.

半径为r的球的体积为$\frac{4}{3}\pi r^3$.

由此可计算出每个基本单元所需材料的体积是上述两个体积之差，即$4\sqrt{2}r^3-\frac{4}{3}\pi r^3$. 因此单位体积所需材料的比为

~~~~~~

充分性：若$2N+1$可以分解成两个不是1的正整数之积，即存在正整数k、l，使得

$2N+1=(2k+1)(2l+1)$，

从而$N=k(2l+1)+l=a_{kl}$.

可见N在该等差数阵中.

综上所述，正整数N在该等差数阵中的充要条件是$2N+1$可以分解成两个不是1的正整数之积.

总之，关联数列的数表问题是近年来数学命题的一个新的亮点，通过数列相关知识的考查，培养学生优良的数学素养，促进数学思维空间的拓展，揭示数学的本质及其内在的美.
~~~~~~

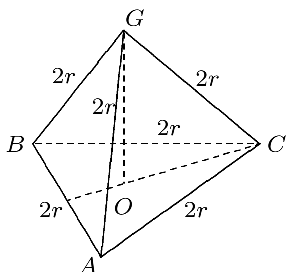


图 2

$$\frac{4r^3\left(\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}{4\sqrt{2}r^3}=1-\frac{\sqrt{2}}{6}\pi\approx 0.2595.$$

下面介绍另一种排列的情况, 如图3所示. 可以看出对每层来说, 以每四个球的球心为顶点的四边形均为正方形如$ABCD$, 其边长则为小球直径, 而其上一层球的球心落在正方形的中心点之上.

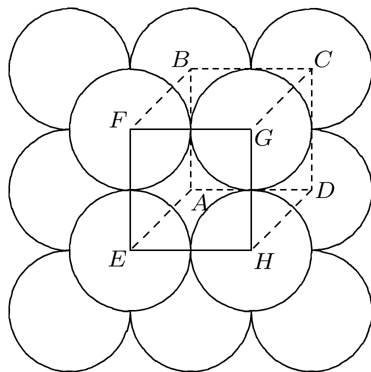


图 3

与前面的情况相似, 下层四个球的球心所组成的正方形$ABCD$与上一层四个球的球心所组成的正方形$EFGH$构成一个斜棱柱, 整个空间都可由这些斜棱柱所充满, 因此也是基本计算单元, 且均包含上下两层各半个球的体积, 即一个完整的球的体积.

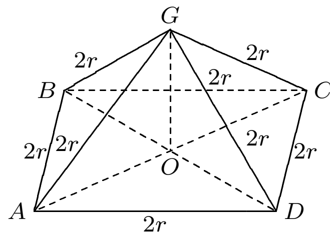


图 4

设球半径为r, 则正方形$ABCD$的面积为$4r^2$. 斜棱柱中两平行平面$ABCD$与$EFGH$之间的距离即为图4中正四棱锥$G-ABCD$的高, 即为$\sqrt{2}r$. 因此斜棱柱的体积为$4\sqrt{2}r^3$.

与前面情形所求得的单位体积所需材料之比完全相同, 也是$1-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi\approx 0.2595$.

两种排列情况的差别是前者每层球数较多但层间距离较大, 而后者每层球数较少但层间距离较小. 两种排列情况所需材料量完全相同. 从宏观角度来看, 虽然最终取得了同样的结果, 但所制成的新型材料, 其物理和力学特性则完全不同.

说明: 上层的球心为什么必然落在下层球心组成的图形的中心点上? 这是因为物理学中势能最小原理的作用. 在具体制作上, 当下层球排列紧密之后, 球心位于同一平面内, 上层球经微小振动, 因自身的重量必能降低势能至极小值. 从数学上来分析, 因紧密排列的原因, 上层球心与其下层相邻的几个球心距应该都是最小值, 只有位于下层球心组成的图形的中心点之上才能满足条件, 否则就不是紧密排列了.

(上接第9–49页)

例9 (北海道·函馆う·サ—ル高中) n是自然数, $[n^2]$表示n^2除以5所得的余数.

(1) 求$[1^2]+[2^2]+[3^2]+\cdots\cdots+[198^2]+[199^2]$的值;

(2) 若$[1^2]+[2^2]+[3^2]+\cdots\cdots+[n^2]>1999$, 求$n$的最小值.

本题一方面考查对于符号$[n^2]$的理解, 另一方面考查余数的规律, 从思维能力方面也有一定的要求. 限于篇幅, 仅给出答案.

(1) 400. (2) 999.

不难看出, 日本中考试题, 相对而言大体上要容易的多, 但在某些试题的构思立意方面, 确有新意.

以上各例, 没有指明试题年份的, 选自文英堂出版的《最高水准问题集——中3数学》一书, 且都注有"难"字的题, 其他例题, 选自各校近几年试题汇编中每一试的最后几题.

空间点的射影定位的探讨

315200 浙江省宁波镇海教师进修学校 李雪明 浙江省宁波镇海中兴中学 陈 斌

在求空间角、空间距离时, 常需要考虑图形定位问题, 其关键往往是确定点在线或面上的射影位置, 这也是解立体几何题的一个难点. 本文就立体几何解题中点的射影定位问题作些探讨.

一、观察图形直接定位

有些立体几何问题, 只要通过观察其直观图, 利用常见的几何特性即可顺利确定, 这类题可以采用直接定位.

例1 (2004年高考福建卷(理)第19题)在三棱锥$S-ABC$中, $\triangle ABC$是边长为4的正三角形, 平面$SAC\perp$平面ABC, $SA=SC=2\sqrt{3}$, M、N分别为AB、SB的中点.

(I)略;

(Ⅱ)求二面角$N-CM-B$的大小;

(Ⅲ)求点B到平面CMN的距离.

分析: (I)略. (Ⅱ)欲求二面角$N-CM-B$的大小, 可先作其平面角, 则要确定点N在面ABC上的射影位置.

观察图1, 由几何特性$SA=SC$, $BA=BC$想到取AC的中点D, 连BD, 易证明$AC\perp$面DSB, 故面$SDB\perp$面ACB, 则点N在面ABC上的射影必在BD上. 过N作$NE\perp BD$于E, $NE\perp$平面ABC, 过E作$EF\perp CM$于F, 连结NF, 利用三垂线定理得$NF\perp CM$. 故$\angle NFE$为二面角$N-CM-B$的平面角.

$\because$ 平面$SAC\perp$平面ABC, $SD\perp AC$,

$\therefore$ $SD\perp$平面ABC.

又$\because$ $NE\perp$平面ABC, $\therefore$ $NE/\!/SD$, 则NE是$\triangle SDB$的中位线.

在Rt$\triangle NEF$中,

$NE=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2-AD^2}=\sqrt{2}$, $EF=\frac{1}{4}MB=\frac{1}{2}$, $\tan\angle NFE=\frac{EN}{EF}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 二面角$N-CM-B$的大小是$\arctan 2\sqrt{2}$.

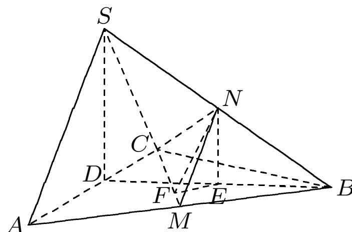


图1

(Ⅲ) 利用体积变换, 易求得B到平面CMN的距离$h=\frac{S_{\triangle CMB}\cdot NE}{S_{\triangle CMN}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

点评: 当两个平面互相垂直时, 其中一个平面上的点或线在另一个平面上的射影显然在这两个平面的交线上.

二、利用命题快速定位

解立体几何题特别是解选择题与填空题时, 往往可直接利用一些常用的命题(定理、性质等)进行定位.

例2 如图2, 在$\triangle ABC$中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2a$. P是$\triangle ABC$所在平面α外一点, 且$PA=a$, $\angle PAB=\angle PAC=60^\circ$, 则

(1) PA和平面α所成的角为________;

(2) 点P到BC的距离为________.

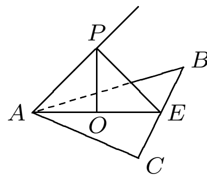


图2

分析: 关键要确定点P在面ABC内的射影O的位置与点P在BC上垂足E的位置. 由

命题: 若$\angle PAB=\angle PAC$, 则点P在面ABC内的射影O必在$\angle BAC$的平分线上. 连结AO并延长交BC于E, 连PE. 因为$AC=AB$, 则$AE\perp BC$, 所以$PE\perp BC$.

故PA和平面α所成的角即为$\angle PAO$, 由$\cos\angle PAO\cos\angle EAC=\cos\angle PAC$, 可求得$\angle PAO=45^\circ$; 由$\mathrm{Rt}\triangle POE$求得$PE=a$.

点评: 我们还可以利用如下命题进行定位.

1.若一个角所在平面外的点到这个角两边距离相等, 则此点在这个平面上的射影在这个角(或补角)的平分线上.

2.设点P是$\triangle ABC$所在平面外一点, P在平面ABC上的射影为O,

(1)若$PA=PB=PC$, 则O为$\triangle ABC$的外心;

(2)若PA、PB、PC与平面ABC所成角相等, 则O为$\triangle ABC$的外心;

(3)若P到$\triangle ABC$三边距离相等, 则O为$\triangle ABC$的内心或旁心;

(4)若面PAB、面PAC、面PBC与面ABC所成角相等, 则O为$\triangle ABC$的内心或旁心;

(5)若PA、PB、PC两两垂直, 则O为$\triangle ABC$的垂心;

(6)若$PA\perp BC$, $PB\perp AC$, $PC\perp AB$, 则O为$\triangle ABC$的垂心.

三、通过计算准确定位

有些立体几何问题, 射影位置很难从定性上去确定, 则可通过计算准确定位.

例3　正三棱锥$S-ABC$中, 侧棱长为2, 正三角形ABC的边长为3, 点M是BC的中点. (1)求证: $BC\perp$面SAM; (2)求异面直线BC与AS的距离.

分析:如图3, (1)由于$AB=AC$, $SB=SC$, 及点M是BC中点, 则$SM\perp BC$, $AM\perp BC$, $\therefore$ $BC\perp$面SAM.

(2)求异面直线BC与AS的距离, 应考虑作其公垂线. 由(1)的启示, 面SAM内的任意一条线均与BC垂直, 因此在面SAM内, 过M作$MN\perp SA$于点N, 显然$MN\perp BC$, $\therefore$ MN即为所求的公垂线段. 欲求MN的长先确定点N在线段AS上还是在其延长线上, 为此, 可以通过计算求出$\cos\angle ASM=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}<0$, 说明点$N$在线段$AS$延长线上.

在$\mathrm{Rt}\triangle SMN$中, $\sin\angle NSM=\dfrac{3}{14}\sqrt{21}$, 则$MN=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$.

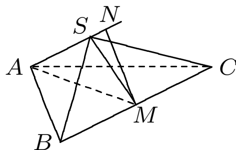


图 3

例4　在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中, $\angle BAC=90^\circ$, $BC_1\perp AC$, $AB=AC=2$, $BC_1=2\sqrt{6}$, 侧棱与底面成60°角, 求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积.

分析: 本题实质是求三棱柱的高. 关键是确定点C_1在面ABC上的射影H的位置. 连AC_1, 观察图4知$AC\perp$面ABC_1, 因此面$ABC_1\perp$面ABC, $\therefore$ 点C_1在面ABC上的射影H必在这两平面的公共直线AB上. 求高C_1H还应进一步确定H在线段AB上, 还是在线段BA的延长线或反向延长线上.

由$C_1H\perp$面ABC知, $\angle C_1CH$是侧棱与底面所成的角, 即$\angle C_1CH=60^\circ$. 设$C_1H=x$, 得$CH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, $AH=\sqrt{\dfrac{1}{3}x^2-4}$.

(1)若H在线段BA的延长线上(如图4), 在$\mathrm{Rt}\triangle C_1BH$中, $BH^2+C_1H^2=BC_1^2$, 即$\left(2+\sqrt{\dfrac{1}{3}x^2-4}\right)^2+x^2=(2\sqrt{6})^2$, 解得$x=\sqrt{15}$, 这时$V=2\sqrt{15}$;

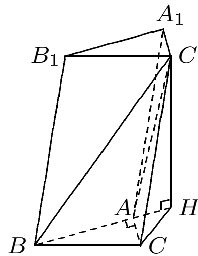


图 4

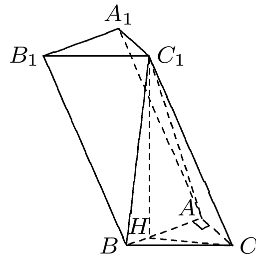


图 5

(2) 若H在线段BA上(如图5), 仿(1), 由$BH^2+C_1H^2=BC_1^2$, 即$\left(2-\sqrt{\frac{1}{3}x^2-4}\right)^2+x^2=(2\sqrt{6})^2$, 解得$x=2\sqrt{6}$, 此时$H$与$B$重合, 可得$V=4\sqrt{6}$;

(3) 若H在线段BA的反向延长线上(如图6), 类似可得方程$\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2-4}-2\right)^2+x^2=(2\sqrt{6})^2$, 解得, $x=2\sqrt{6}$, 这与$\mathrm{Rt}\triangle C_1HB$中$C_1H<C_1B$矛盾, 故$H$不可能在线段$BA$反向延长线上 (图6实际不存在).

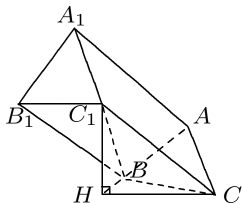


图 6

由上述可知$V=2\sqrt{15}$或$4\sqrt{6}$.

点评: 由上例说明通过计算, 结合分类讨论, 准确地定出了点C_1在面ABC上的射影位置, 有利于全面认识问题的本质.

四、翻折问题返原定位

对于翻折问题, 当在空间直观图中很难定射影位置时, 要充分利用翻折前的平面图的几何特性, 并不断进行比较.

例5 如图7, 在平行四边形$ABCD$中, 对角线AC与 BD相交于E点, $AB=a$, $AD=2a$, $\angle BAD=60^\circ$, 将平面沿对角线BD折成直二面角. 求二面角$A-EC-B$的余弦值.

分析: 考虑作二面角$A-EC-B$的平面角. 如图8, 在$\triangle ABD$中, 易证明$AB\perp BD$, 而$A-BD-C$是直二面角, 则$AB\perp$面BCD. 以下只要确定点A或点B在线CE上的射影.

观察图7, 过B作CE的垂线, 垂足在线段CE的延长线上. 由此得到启示: 如图8, 过B作$BF\perp CE$于F(F在CE的延长线上),连结AF, 由三垂线定理知$AF\perp CE$, 故$\angle AFB$为二面角$A-EC-B$的平面角.

最后比较原平面图与空间直观图, 可求得$\cos\angle AFB=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

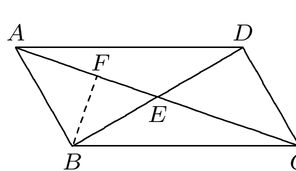


图 7

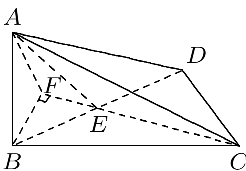


图 8

五、运用转化合理定位

例6 (2004年高考重庆卷(理)第19题) 如图9, 四棱锥$P-ABCD$的底面是正方形, $PA\perp$底面$ABCD$, $AE\perp PD$, $EF/\!/CD$, $AM=EF$.

(1) 证明MF是异面直线AB与PC的公垂线;

(2) 若$PA=3AB$, 求直线AC与平面EAM所成角的正弦值.

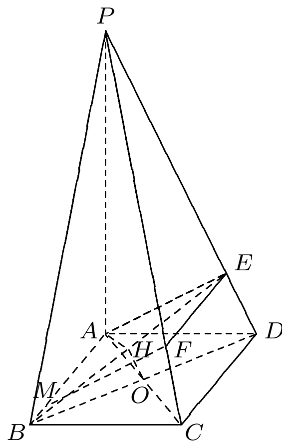


图 9

分析: (1) 略. (2) 欲求线AC与面MAE所成的角, 需确定点C在面MAE上的射影位置, 比较困难. 考虑线AC上的其它点. 连结BD交AC于O, 问题转化为: 确定点O在面MAE上的射影位置.

注意到$PD\perp$面MAE, 连结BE, 则$DE\perp BE$. 过O作BE的垂线OH, 垂足为H, 故$OH/\!/DE$, 因此$OH\perp$面MAE, 说明点O在面MAE上的射影就是H.连结AH,则$\angle HAO$是所要求的线AC与面MAE所成的角.

设$AB=a$, 则$PA=3a$, $AO=\dfrac{1}{2}AC=$

(下转封底)

对《错题集》中一处概括的思考

100102 北京市第八十中学 索云旺 王贵军 吴万辉 王立峰

贵刊2004年第12期发表的《(错题集)的意义及其操作要点》一文, 对指导学生进行有效的高三数学复习有着重要意义, 读后深受启发. 然而笔者发现文中存在几处不妥, 提出来供商榷.

为方便说明问题, 现把原文第二段摘抄如下:

题1 曲线$C: y^2-4x^2=1$, 求斜率为2的直线l与曲线C相交的弦的中点轨迹.

解: 设l与曲线C交于A、B两点,

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、中点$P(x,y)$,

$\because$ A、B在曲线上,

$$\therefore \begin{cases} y_1^2-4x_1^2=1, & (1)\\ y_2^2-4x_2^2=1. & (2)\end{cases}$$

$(1)-(2)$: $(y_1-y_2)(y_1+y_2)-4(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$,

$$(y_1+y_2)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4(x_1+x_2),$$

$$\text{由题意得:}\begin{cases} k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2,\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=x,\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=y.\end{cases}$$

$\therefore$ $y=2x$ (夹在双曲线内的部分).

若此题换为: 已知AB的中点$P(3,1)$, 逆向题: 求直线l的斜率, 也可用此法. 总之此法适用于直线l与曲线交于A、B两点, 其中l的斜率、AB的中点, 二者知其一, 求另外一项, 均可选用.

一、题1是道错题

题1是道错题. 事实上, 斜率为2的直线与双曲线$C: y^2-4x^2=1$的渐近线$y=2x$平行, 所以与双曲线只有一个交点, 也就谈不上弦的中点的轨迹问题. 题1后的概括:"若此题换为: 已知AB的中点$P(3,1)$, 逆向题: 求直线l的斜率, 也可用此法." 是不妥的, 如把点P的坐标改为$\left(1,\dfrac{21}{10}\right)$, 用此法可求出直线$l$的斜率为$\dfrac{40}{21}$, 进而求得方程为$y-\dfrac{21}{10}=\dfrac{40}{21}(x-1)$.

事实上, 满足条件的直线l是不存在的. 所以这里的概括是有问题的. 这种解法(俗称为"点差法")以思路清晰、运算简捷倍受师生青睐, 广泛地运用于解题之中. 而这里涉及的问题(过定点P的直线与曲线相交于两点A、B, 且点P是AB的中点, 求直线AB的方程)又是高考中常考常新的问题, 因此有必要对这类问题及解法仔细研究, 予以澄清.

二、两道高考试题参考答案的回顾及分析

题2 (1981年全国高考题) 给定双曲线$2x^2-y^2=2$. 过点$B(1,1)$能否作直线m使直线与所给双曲线交于两点Q_1、Q_2, 且点B是线段Q_1Q_2的中点? 这样的直线m如果存在, 求出它的方程, 如果不存在, 说明理由.

解: 设所求直线方程为$y=k(x-1)+1$, 代入双曲线整理得 $(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0$. (3)

设$Q_1(x_1,y_1)$、$Q_2(x_2,y_2)$, 则x_1、x_2是(3)的两个实数根, 故$x_1+x_2=\dfrac{2k^2-2k}{k^2-2}$.

如果B是Q_1Q_2的中点, 就有$\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$, 即$x_1+x_2=2$, 所以有$\dfrac{2k^2-2k}{k^2-2}=2$. 综合起来, k应满足

$$\begin{cases}\Delta=(2k^2-2k)^2\\ -4(2-k^2)(-k^2+2k-3)>0\\ \dfrac{2k^2-2k}{k^2-2}=2,\end{cases}\quad(4)$$

由第二式解出$k=2$, 但$k=2$不满足第一

式, 所以 (4) 无解.

答: 满足题中条件的直线 m 不存在.

题3 (2002年江苏高考题) 设 A、B 是双曲线 $2x^2-y^2=2$ 上的两点, 点 $N(1,2)$ 是线段的 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

解: 据题意, 可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+2$, 代入 $2x^2-y^2=2$, 整理得: $(2-k^2)x^2-2k(2-k)x-(2-k)^2-2=0$. (5)

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则 x_1、x_2 是方程 (5) 的两个不同根, 故 $2-k^2\neq 0$ 且 $x_1+x_2=\dfrac{2k(2-k)}{2-k^2}$. 由 $N(1,2)$ 是 AB 的中点得 $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=1$, 即 $\dfrac{k(2-k)}{2-k^2}=1$.

$\therefore\ k(2-k)=2-k^2$, 解得 $k=1$.

故直线 AB 的方程为 $y=1\times(x-1)+2$, 即 $y=x+1$.

仔细观察两道题目, 属"过定点 P 的直线与曲线相交于两点 A、B, 且点 P 是线段 AB 的中点, 求直线 AB 的方程"问题. 从参考答案来看, 题2对求出的直线的斜率验证了 Δ, 由于 $\Delta<0$, 从而直线的斜率不存在, 所以, 直线不存在. 题3没有验证 Δ, 直线又存在了. 为什么呢? 有不少教辅资料解释题2是探索性问题, 要增加验证这一步骤. 如果这样解释, 那么, 我们对题3可以改变问法, 变为探索性问题, 所以, 这种解释是站不住脚的. 对于题3是不需要验证, 还是应验证而没有验证呢?

我们知道, 解析几何的本质是用代数的办法研究几何问题. 那么, 这就要求把几何条件等价地转化为代数条件. 以题2为例: 直线与双曲线相交 $\Longleftrightarrow$ 方程 (3) 是一元二次方程且有两个不相等的实数根 $\Longleftrightarrow \begin{cases}2-k^2\neq 0,\\ \Delta>0.\end{cases}$ 而点 B 是 Q_1Q_2 的中点 $\Longleftrightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}=1$.

综合起来, 直线 m 与所给双曲线交于两点 Q_1、Q_2, 且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}2-k^2\neq 0,\\ \Delta>0,\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=1.\end{cases}$$

所以, 题2的解答是十分严密的. 这样, 题3的解答就不严密了, 犯了用必要条件代替充要条件的错误. 那么, 用"点差法"解决题2、题3这类问题必须加上验证 Δ 这一不可缺少的步骤, 也就不难理解了, 从而对 Δ 的验证并不是因为这类问题是否是探索性问题, 也就十分清楚.

三、对问题及解法的进一步讨论

通过以上对题2、题3的解答回顾及分析, 解决"过定点 P 的直线与曲线相交于两点 A、B, 且点 P 是线段 AB 的中点, 求直线 AB 的方程"问题可用高考提供的参考答案的方法 (称方法一); 也可用"点差法" (称方法二). 但我们又发现题2、题3除定点坐标不一样外, 其他条件一样, 为什么题2中满足条件的直线不存在, 而题3却存在呢?

画出双曲线 $2x^2-y^2=2$ 及点 $B(1,1)$、点 $N(1,2)$. 可以看出题2中的点 $B(1,1)$ 位于两渐近线所成的含双曲线的顶点区域 E (图1) 内, 题3中的点 $N(1,2)$ 位于两渐近线所成的不含双曲线的顶点区域 F (图2) 内. 同时, 我们规定双曲线的两个焦点各自所在的互不连通的区域 D (图3) 为双曲线的内部. 显然, 当定点位于双曲线的内部区域 D (图3) 时, 一定能作直线 m 使直线与所给双曲线交于两点 Q_1、Q_2, 且定点是线段 Q_1Q_2 的中点 (椭圆、抛物线同样).

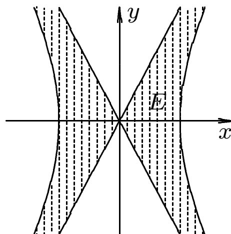


图 1

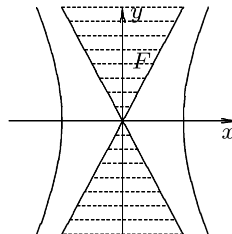


图 2

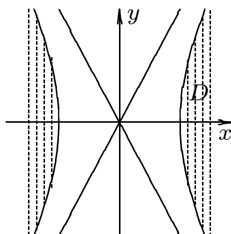


图 3

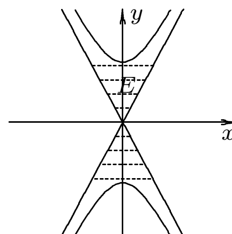


图 4

一道函数方程的开放题

200333 上海市晋元高级中学 阴洪生

数学开放题对于发展学生的创新能力有很大的帮助. 函数方程的题目, 如果对于所求的解不加或少加一些限制条件, 往往就是很好的开放题. 下面是我们在教学实践中遇到的一个例子. 事情缘起于一本教辅读物的一个练习题: 求 $f(x)$, 使 $f(x)$ 满足 $f[f(x)] = x + 2$ ······ (1)

书后给出的答案是 $f(x) = x + 1$. 该题本意是在学生学习了函数的基本概念之后, 通过一次函数复合的具体例子, 让学生体会复合函数的概念. 这样的设计思想是不错的. 但是题目中没有明确给出 "$f(x)$ 是一次函数" 的条件, 给学生造成了困惑. 不少学生要求解释这道题. 当被告之应加上 "$f(x)$ 是一次函数" 的条件后, 许多学生认为 "$f(x)$ 是一次函数" 的条件可由 (1) 推出, 有些学生则认为根据不充分. 在这样的情况下, 求出函数方程 (1) 的一个非线性解的兴趣被唤起, 我们不愿放过这样一个能让学生开阔数学眼界、提升思维深度的大好机会. 于是, 我们开始探究能否构造一个满足 (1) 的非线性函数的例子.

在具体进行构造之前, 有必要了解 $f(x)$ 的一些基本性质, 以便构造时有正确的方向. 由 (1) 知, $f(x)$ 的定义域和值域是一切实数. 如果有 x_1、x_2 使 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, 由 (1) 得 $x_1 = x_2$. 这表明 $f(x)$ 是一对一的, 从而 $f(x)$ 有反函数. 在考虑函数的复合时, 需要的必要条件是函数的复合满足结合律, 即 $(f\circ f)\circ f(x) = f\circ(f\circ f)(x)$, 由此得到

$f(x+2) = f(x) + 2$ ························ (2)

因此我们只要对满足 $0 \leqslant x < 2$ 的实数 x 定义 $f(x)$, 然后按照 (2) 将 $f(x)$ 的定义延拓到整个实数轴上即可.

函数 $f(x)$ 的定义.

令 $\varphi(x)$ 为任意一个定义域和值域都为开区间 $(0,1)$ 的有反函数的函数, 它的反函数记为 $\varphi^{-1}(x)$. 下面 k 总表示整数. 定义 $f(x)$ 如下:

(1) 定义 $f(k) = k + 1, k \in \mathbf{Z}$;

～～

可以证明 (请读者自己完成) 结论: 当定点位于区域 E (图1) 时, 不能作直线 m 使直线与所给双曲线交于两点 Q_1、Q_2, 且定点是线段 Q_1Q_2 的中点 (如同定点在椭圆、抛物线外部不能作直线 m 使直线与所给双曲线交于两点 Q_1、Q_2, 且定点是线段 Q_1Q_2 的中点一样). 当定点位于区域 F (图2) 时, 一定能作直线 m 使直线与所给双曲线交于两点 Q_1、Q_2, 且定点是线段 Q_1Q_2 的中点.

有了以上结论, 我们可以更好地理解题2满足条件的直线不存在, 而题3却存在的原因. 于是, 解决这类问题有如下方法三: 即首先判断定点所在区域, 从而确定满足条件的直线是否存在, 再用"点差法"求其方程, 没有必要再验证 Δ 了. 譬如笔者把题1中所改写的已知 AB 的中点坐标 $P(3,1)$, 改为 $P\left(1,\dfrac{21}{10}\right)$. 因为点 $P\left(1,\dfrac{21}{10}\right)$ 在区域 E 内 (图 4), 所以, 过点 $P\left(1,\dfrac{21}{10}\right)$ 作直线, 使直线与所给曲线交于 A、B 两点, 且点 P 是线段 AB 的中点, 这样的直线不存在. 又如题3, 因为点 $N(1,2)$ 在区域 F 内 (图2), 所以直线存在, 可用"点差法"求出直线方程.

参考文献

周鹰. (错题集)的意义及其操作要点. 数学教学. 2004年第12期.

“一道数列求和题”引发的联想

235000　安徽省淮北市第一中学　周恩超

习题课的教学一直受到老师们的重视, 因为它对培养学生的思维品质和创新能力大为有利, 是我们教学中必不可少的一个环节. 在一般情况下, 习题课教学的设计大都从“知识内容、解题方法、数学思想”等角度去考虑. 本文试图换一个角度, 从“思维的合情跨越”作为安排课堂教学的“线索”进行设计. 一种尝试仅供同行讨论.

一、一道“导人题”

题目　已知数列$\left\{n\cdot\dfrac{1}{2^n}\right\}$, 求其前$n$项的和$S_n$.

该数列$\left\{n\cdot\dfrac{1}{2^n}\right\}$中的项是由等差数列$\{n\}$和等比数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$中相对应项的乘积所得到. 事实上, 这个数列的求和并不困难. 在高三进行复习时, 我们常常把它作为一道“导入题”, 用于给学生介绍“错位相减法”进行数列求和. 其方法如下:

令 $S_n=1\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2^2}+3\cdot\dfrac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^n}$, (1)

则 $\dfrac{1}{2}S_n=1\cdot\dfrac{1}{2^2}+2\cdot\dfrac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2^n}+n\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$. (2)

$(1)-(2)$得

$\dfrac{1}{2}S_n=1\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}+\cdots+1\cdot$

---

(2) 如$2k<x<2k+1$, 定义$f(x)=2k+1+\varphi(x-2k)$;

(3) 如$2k+1<x<2k+2$, 定义$f(x)=2k+2+\varphi^{-1}[x-(2k+1)]$.

命题: 如此定义的函数$f(x)$满足函数方程$f[f(x)]=x+2$.

证明: 如x是整数, 命题显然成立. 如$2k<x<2k+1$, 则$0<x-2k<1$, 所以$0<\varphi(x-2k)<1$. 由于$f(x)=2k+1+\varphi(x-2k)$, 故$2k+1<f(x)<2k+2$. 从而

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=2k+2+\varphi^{-1}[f(x)-(2k+1)]\\&=2k+2+\varphi^{-1}(\varphi(x-2k))\\&=2k+2+x-2k=x+2.\end{aligned}$$

同理, 如$2k+1<x<2k+2$, 则$0<x-(2k+1)<1$, 所以$0<\varphi^{-1}[x-(2k+1)]<1$. 由于此时$f(x)=2k+2+\varphi^{-1}[x-(2k+1)]$, 故$2k+2<f(x)<2k+3$, 也即$2(k+1)<f(x)<2(k+1)+1$. 从而

$$\begin{aligned}f[f(x)]&=2(k+1)+1+\varphi[f(x)-2(k+1)]\\&=2k+3+\varphi[\varphi^{-1}(x-(2k+1))]\\&=2k+3+x-(2k+1)=x+2.\end{aligned}$$

证毕.

在上面的构造中, 函数φ的选取有很大的任意性. 下面是几个例子.

例1　如取$\varphi(x)=x\ (0<x<1)$, 容易验证此时$f(x)=x+1$.

例2　如取$\varphi(x)=x^2\ (0<x<1)$和$\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}\ (0<x<1)$, 则$f(x)$为非线性函数. 它的图象如图1.

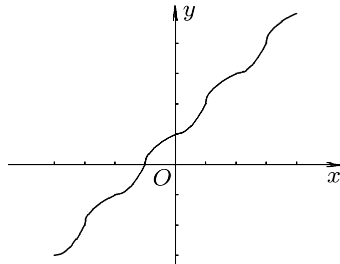


图 1

例3　可以构造逐段线性函数$f(x)$, 如取

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}<x<1.\end{cases}$$

$\frac{1}{2^n} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$,即

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

所以, $S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{n}{2^n}$.

说明:此时进一步引导学生求当 $n \to +\infty$ 时, S_n 的极限值.

得 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left\{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \frac{n}{2^n}\right\} = 2$, 从而有 $1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots=2.$ (3)

对于极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$, 可给学生作如下解释: 由于 $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n > n+\frac{n(n-1)}{2}$, 所以 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{n}{n+\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}(n-1)}$,

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(n-1)}=0$,

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

二、引发的联想

下面引导学生就 (3) 式展开联想. 观察左边的结构形式: $1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots$. 学生不难想到“概率统计”中的离散型随机变量的数学期望公式, 继而构造一个随机变量 X 让它满足下表:

X	1	2	3	······	n	······
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	······	$\frac{1}{2^n}$	······

由上计算得 $E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots=2.$

接着会产生追问:这里的随机变量 X 是什么含义, 怎样才能让其“满足”上表, 即要求随机变量 X 满足: $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$. 否则“人为”地构造一个客观不存在的东西是没有任何意义的. 对此应启发学生创设合理的问题情景.

情景问题(“抛硬币事件”): 一个人向上抛掷一枚硬币, 要求结果是正面向上, 我们期望他向上抛硬币的次数是多少?

分析:学生凭直觉可能会认为应该抛两次, 但是, 应该怎样做出科学的解释呢? 设 X 表示获得正面向上所抛硬币的次数. 则 $X=1$ 表示“向上抛硬币一次即得到正面向上”, 其概率为 $P(X=1)=\frac{1}{2}$, $X=2$ 表示“向上抛硬币两次才得到正面向上”, 每次抛硬币事件是相互独立的, 所以其概率为 $P(X=2)=\frac{1}{2^2}$. 继续思考下去, 若 $X=k$ 即表示前 $k-1$ 次向上抛硬币得到反面向上, 而第 k 次向上抛硬币才得到正面向上, 故其概率为 $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$. 这样就有了上面的随机变量的分布列. 从而得到结果是正面向上, 所抛硬币次数的期望为: $E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots=2$. 这样就解释了上面学生的直观猜想: 即平均向上抛掷硬币两次才会得到正面向上的结果.

尽管上面的结果并不重要, 但学生的思维却进行了一次合理的跨越, 从数列求和计算到概率统计中数学期望的运用. 事实上, 在统计中有很多类似这种结构的表达式, 如随机变量 ξ 服从二项分布 $B(n,p)$, 则随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
p	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^np^nq^0$

其中, $p+q=1$, p、q 为参数, 则

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}=np, \quad (4)$$

这时启发学生观察 (4) 式, 不难看出该式既与数列求和 (1) 的结构类似, 同时又很容易联想到以前学过的组合恒等式. 这时, 老师不失时机地构造如下题目.

组和恒等式问题 求证:

$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=n\cdot 2^{n-1}. \quad (5)$$

分析: 引导学生比较 (4) 式与 (5) 式的不同, 发现 (4) 式中多出字母“p^kq^{n-k} ”, 右边结果是“np”, 而 (5) 式结果是“$n\cdot 2^{n-1}$”(不含字母 p、

q). 事实上, 在(4)式中从0开始取值与从1开始取值结果一样. 因此我们把注意力集中到字母p、q上, 联想到平时我们常用的解题方法——赋值法, 令$p=\frac{1}{2}$, 由于$p+q=1$, 所以显然$q=\frac{1}{2}$, 这样就有: $\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=n\cdot\frac{1}{2}$, 化简即可得证. 当然为了给出该题的完整证明, 我们可以构造一个概率模型如下: 一射手向某一目标独立射击n次, 每次击中目标的概率为$\frac{1}{2}$, 以ξ表示在n次射击中击中目标的次数. 显然, 随机变量ξ服从二项分布, 即

$P(\xi=k)=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \cdots, n$.

我们不妨把上述方法称作"构造概率模型法".

接着, 让学生观察(5)式右端"$n\cdot 2^{n-1}$"的特点, 易想到求导公式: $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, 这里令$x=2$, 上式右端即为"$n\cdot 2^{n-1}$". 而左端中出现的"2^n"可写成:

$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$, 而该式又是在下式中, 令$x=1$得到.

$$(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n. \qquad (6)$$

到此, 我们对(6)式两边的x进行求导, 有

$$n(1+x)^{n-1}=1\cdot C_n^1x^0+\cdots+k\cdot C_n^kx^{k-1}+\cdots+n\cdot C_n^nx^{n-1}. \qquad (7)$$

令$x=1$得$\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k=n\cdot 2^{n-1}$, 从而获证. 我们把该方法称为"函数求导法".

在第二种方法的暗示下, 有些同学将目光转向(5)左端中的"$k\cdot C_n^k$", 经过一段时间的思考, 个别同学想到了组合公式:$C_{n-1}^{k-1}=\frac{k}{n}\cdot C_n^k$. 将它变形为:$k\cdot C_n^k=n\cdot C_{n-1}^{k-1}$. 这样我们将(5)式左端"$k\cdot C_n^k$"换掉, 有

$$\sum_{k=1}^{n}kC_n^k=\sum_{k=1}^{n}n\cdot C_{n-1}^{k-1}=n\cdot\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}=n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}=n\cdot 2^{n-1}.$$ 从而得证.

说明:关于这道组合恒等式的证明, 师生共同努力, 通过寻找它和它以外事物的关联, 思维不断地向前发展:从公式结构联想到二项分布的数学期望公式, 从表达式"$n\cdot 2^{n-1}$"的特点联想到函数求导公式$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, 然后思维又回归到组合公式$k\cdot C_n^k=n\cdot C_{n-1}^{k-1}$中通过转化获证. 这种思维上的信马由缰,事实上是"形散而神不散". 它带给学生的是兴奋、愉悦、享受和力量.

三、思考

在这节课的教学设计中, 尽管涉及的题目量很少, 但是从中我们看到学生的"思维跨度"很大:从"数列求和"到"概率统计"; 从"纯粹数学问题"到"现实情景问题"; 从"解决问题"到"提出问题". 但是这种"跨越"不是突兀的, 而是合情的、连续的、甚至是"被迫的", 师生思维的进程不断地受"问题所驱动". 本人感觉如果我们在教学中善于扑捉"有价值的素材", 并引导学生展开合情联想. 必将使学生兴趣大增, 并能让他们感受到数学的无穷魅力以及产生"用数学"的意识. 同时, 这也为教师的教学增添不少"亮点". 所以说, "善于观察、善于思考、善于联想"这不仅是对学生而言的, 显然, 也是针对老师的.

记得伟大数学家希尔伯特的学生外尔曾这样描绘过:"希尔伯特这位吹笛人所吹的甜蜜的芦笛声, 诱惑着许多老鼠投入数学的深河". 这正是我们憧憬并追求的一种境界:让学生迷恋你的课堂.

(上接第9–43页)

上是否也存在这样的结论呢?

通过上面的联想, 这道原本是一个函数的问题进而发散到解析几何中, 让我们有焕然一新的感觉.

从上面看来, 解题后的读题是个大问题, 题目读懂与否会有完全不一样的效果.

参考文献

2005年上海市普通高等学校春季招生考试数学试卷. 数学教学. 2005年第2期.

一道立体几何老题的探索与创新

274300 山东省单县第二中学 李峦方

一、问题的由来

每个教师在教学中都会选取一些具有代表性的题目，来教给学生有关的方法和技巧，而多数都是被公认为解决某类问题"好"的方法，需要学生去接受、模仿、吸收和掌握. 而它们真的就是最好的吗？笔者的一次经历改变了我的看法.

例1 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都为1(如图1)，M 是底面 BC 边的中点，N 是侧棱 CC_1 上的点，且 $CN=\frac{1}{4}CC_1$，求证 $AB_1\perp MN$.

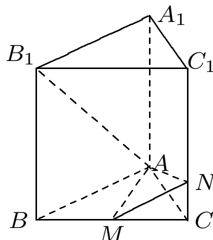


图 1

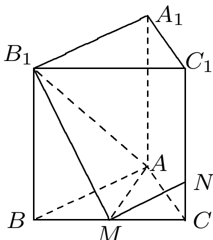


图 2

这是人教社版高中数学第二册(下B)中的一道例题，这类题目公认为纯几何方法比较繁琐，用向量做比较好，教材中就给出了下面的解法.

证明：设 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{c}$，则由已知条件和正三棱柱的性质得：

$|\overrightarrow{a}|=\left|\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{c}|=1$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=1$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$，

$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{b}+\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{4}\overrightarrow{c}$，

$$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+\frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 60^\circ+\frac{1}{4}=0.$$

所以 $AB_1\perp MN$.

当然还可以用向量的坐标形式. 而所谓纯几何方法的不足在何处呢？我做了如下探索：

因为如图2易得 $AM\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以要证 $AB_1\perp MN$，只需要证明 $MB_1\perp MN$. 传统的做法是在 $\triangle MNB_1$ 中，计算出各边长，来证明 $MB_1\perp MN$. 其实只要证明 $\angle CMN$ 与 $\angle BMB_1$ 互余就行，这只须证明：$\tan\angle CMN\times\tan\angle BMB_1=1$，

因为
$$\tan\angle CMN\times\tan\angle BMB_1=\frac{CN}{MC}\times\frac{BB_1}{BM}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=1.$$

所以结论的成立是显然的. 当笔者问学生：你做过的题目中有哪些可以用这种方法解时，学生列出了下列公认比较难的题目，用这种方法竟可轻易解决(为节省篇幅，只给出关键处的略解)：

(1) 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CB=1$，$CA=\sqrt{3}$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点，求证 $BA_1\perp AM$.

简证：如图3，由已知可得 $BC\perp AM$，若 $BA_1\perp AM$，则 $AM\perp$ 平面 A_1BC，所以要证 $BA_1\perp AM$，只须证明 $CA_1\perp AM$，只须证明 $\angle A_1CA$ 与 $\angle CAM$ 互余即可，因为

$$\tan\angle A_1CA\times\tan\angle CAM=\frac{AA_1}{AC}\times\frac{MC}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}}=1,$$

所以 $CA_1\perp AM$.

注: 由此发现 $BC=1$ 多余.

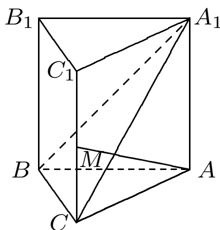


图 3

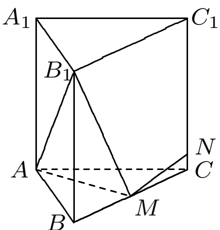


图 4

(2) 如图4, 正三棱柱的侧棱长为2, 底面边长为1, M 是 BC 的中点, 在直线 CC_1 上求一点 N, 使 $MN\perp AB_1$.

略解: 由已知可得 $AM\perp MN$, 若 $AB_1\perp MN$, 则 $MN\perp$ 平面 B_1AM.

所以要证 $AB_1\perp MN$, 只须证明 $MB_1\perp NM$, 因为 $\angle B_1MC$ 是钝角, 故点 N 应在 C 的上方.

设 $CN=x$, 则只须

$$\frac{BB_1}{BM}\times\frac{CN}{CM}=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{x}{\frac{1}{2}}=1, \text{即} x=\frac{1}{8}.$$

以上两题皆为课本上的习题, 且在不少的资料上都出现过. 教学参考书和资料所给答案都是认为纯几何方法比较繁琐, 向量较好, 甚至一些资料还特意用其说明向量解法的优越性. 但其实我们看到用这种方法口算就可以了, 比向量方法似更简单.

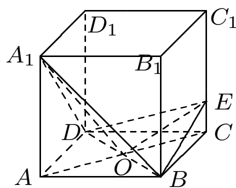


图 5

(3) 如图5, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, CC_1 上是否存在一点 E, 使面 $A_1BD\perp$ 面 BDE? 若存在, 请指出点 E 的位置, 若不存在, 要说明理由.

一般认为该题通过猜想 E 的位置是最简单的方法, 但利用上面的方法, 变得更显而易见. 事实上易得:

$\angle A_1OE$ 为二面角 A_1-BD-E 的平面角, 故只要 E 满足 $\frac{AA_1}{AO}\times\frac{EC}{CO}=1$ 就行, 显然此时 E 处于 CC_1 的中点的位置.

二、进一步的思考

在随后的时间, 我发现很多这一类难题用这种方法解变得非常容易, 这种"意外"的惊喜让我想到, 还有多少题目值得去重新审视其解法呢? 赶紧把本周用过的题看一下, 这回可让我吃惊不小!

例2 (2003年全国高考试题) 下列五个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M、N、P 分别为其所在棱的中点, 其中 $l\perp$ 面 MNP 的图形(图6 – 图10) 的序号是______.

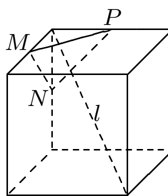


图 6

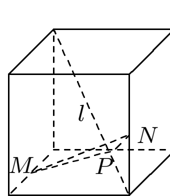


图 7

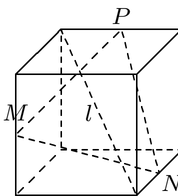


图 8

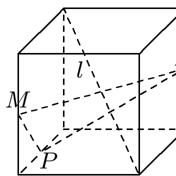


图 9

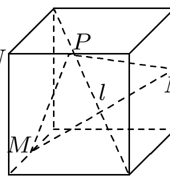


图 10

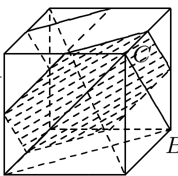


图 11

笔者所见过的这道题的解答(包括高考命题组的), 都是一个一个判断, 并被认为使用向量的坐标形式解决较好, 但经仔细考虑会发现, 垂直于 l 的截面一定平行于图11中的面 ABC, 显然图9和图10就是这个截面的情形, 而图7和图8不满足要求. 故答案为图6, 图9, 图10.

例3 P、A、B、C 是球面上的四个点, PA、PB、PC 两两垂直, 且 $PA=PB=BC=1$, 求球的体积与表面积.

本题的通常解法是: 如图12, 先判断出球心 O 在正四面体 $P-ABC$ 外, 然后求出 PO' 和 CO' 的长度, 用 $OC^2=\sqrt{(OP-PO')^2+CO'^2}$ 和 $OC=OP=R$ 解出半径 R. 换个角度看, 在图13中容易看出: 到 P、A、B、C 的距离相等的点为正方体的中心 O, 即球心就是点 O, 所

以该球的半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (正方体的体对角线的一半), 何其易也!

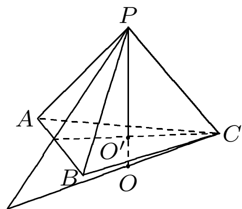


图 12

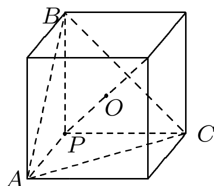


图 13

例4　二面角 $\alpha-a-\beta$ 的平面角为 120°, 在面 α 内, $AB\perp a$ 于 B, $AB=2$, 在面 β 内, $CD\perp a$ 于 D, $CD=3$, $BD=1$, M 是棱上一个动点, 则 $AM+CM$ 的最小值为________.

按原答案的提示, 几乎都没能顺利解出来, 但经探索曾得出如下非常简单的解法:

把问题换个说法: 如图14, 找一条经过面 α 和 β 的路径, 使得从点 A 到点 C 所走过的路程最短. 由此将二面角展成平面, 如图15, 线段 AC 长即为所求. 易知为 $\sqrt{26}$.

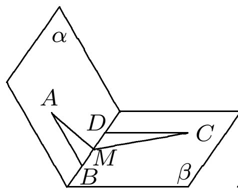


图 14

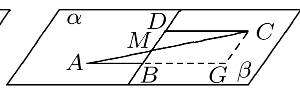


图 15

当时有个老师说用函数的方法没有能够解出来, 这提醒我去研究一下是否真的如此. 从图14可看出: 若点 M 在线段 BD 外, 长度一定大于 $A-D-C$ 或 $A-B-C$, 故点 M 在线段 BD 上, 设 $DM=x$, 则 $BM=1-x$, 所以 $AM+CM=\sqrt{4+(1-x)^2}+\sqrt{9+x^2}$, 就转化为求 $\sqrt{4+(1-x)^2}+\sqrt{9+x^2}$ 的最小值.

对这类题目一般看成在 x 轴上找一点, 使其到点 $(2,1)$ 和 $(3,0)$ 的距离之和最小是最好的方法. 笔者既然是反思这些方法, 当然多想了一点: 既然能看成距离的和, 为什么不看成是两个向量模的和呢?

令 $\overrightarrow{a}=(2,1-x)$, $\overrightarrow{b}=(3,x)$,

则 $\sqrt{4+(1-x)^2}+\sqrt{9+x^2}=|\overrightarrow{a}|+\left|\overrightarrow{b}\right| \geqslant \left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=|(5,1)|=\sqrt{26}$. “=”成立时, 二向量同向, 故有 $\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{x}{3}$, 解得 $x=\dfrac{3}{5}$. 不仅在计算量上小, 而且容易推广到更一般的情况及求差的最值上去. 难道这不是好的数学?

注: 两种方法都显示二面角的大小这个条件是多余的.

三、不算多余的担忧

对一周内做过的个别题多思考了一点, 就带给我们这么多的惊喜, 这又让我有点担忧: 还有多少被公认为“好”的方法挡住了我们的视线, 多少“坏”的方法没有思考就被带着偏见打入冷宫? 习惯上“好”与“坏”的认识, 在多大程度上可能禁锢着我们的思维? 也许不停地思考, 不停地探索, 才是我们真正应该掌握的数学思想方法.

(上接第9–15页)

师生共同讨论: 审清题意, 看清结论, 超出预料, 引导思考. 发现将结论坐标化后, 可用以下三种方法即二次函数法、导数法、换元法, 下用换元法解决.

学生14: 设 $M(4\cos\alpha, 2\sqrt{3}\sin\alpha)$, 则

$\overrightarrow{MA}=(-4-4\cos\alpha, \sqrt{3}-2\sqrt{3}\sin\alpha)$,

$\overrightarrow{MF}=(2-4\cos\alpha, -2\sqrt{3}\sin\alpha)$,

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MF}=(-12\cos\alpha, \sqrt{3}-6\sqrt{3}\sin\alpha)$,

$\therefore |\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MF}|^2=144\cos^2\alpha+108\sin^2\alpha-36\sin\alpha+3=-36\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2+156$,

$\therefore$ 当 $\sin\alpha=1$ 时, $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MF}|^2$ 的最小值是75, $\therefore$ $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MF}|$ 最小值是 $5\sqrt{3}$.

教师点评: 通过本题设计, 训练学生建立拓变多态的数学模型, 打破“思维定势”框架的束缚, 有效地培养学生的创新能力和开拓意识.

师生回顾: 对同一个问题可以有多种思考方向, 使学生产生纵横联想, 启发学生一题多解、一题多变、一题多思, 训练学生的发散性思维.

2005年上海市初中毕业生统一学业考试

数 学 试 卷

考生注意:

1. 本卷含四大题, 共25题;

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须写出证明或计算的主要步骤.

一、填空题: (本大题共14题, 满分42分)

【只要求直接填写结果, 每个空格填对得3分, 否则得零分】

1. 计算: $(x^2)^2 =$ ________.

2. 分解因式: $a^2 - 2a =$ ________.

3. 计算: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) =$ ________.

4. 函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是________.

5. 如果函数 $f(x) = x+1$, 那么 $f(1) =$ ________.

6. 点 $A(2,4)$ 在正比例函数的图象上, 这个正比例函数的解析式是________.

7. 如果将二次函数 $y=2x^2$ 的图象沿 y 轴向上平移1单位, 那么所得图象的函数解析式是________.

8. 已知一元二次方程有一个根为1, 那么这个方程可以是________(只需写出一个方程).

9. 如果关于 x 的方程 $x^2+4x+a=0$ 有两个相等的实数根, 那么 $a =$ ________.

10. 一个梯形的两底长分别为6和8, 这个梯形的中位线长为________.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB 和 AC 上, 且 $DE /\!/ BC$, 如果 $AD=2$, $DB=4$, $AE=3$, 那么 $EC =$ ________.

12. 如图1, 自动扶梯 AB 段的长度为20米, 倾斜角 A 为 α, 高度 BC 为________米(结果用含 α 的三角比表示).

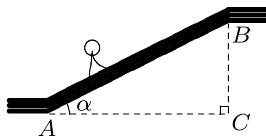


图 1

13. 如果半径分别为2和3的两个圆外切, 那么这两个圆的圆心距是________.

14. 在三角形纸片 ABC 中, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AC = 3$. 折叠该纸片, 使点 A 与点 B 重合, 折痕与 AB、AC 分别相交于点 D 和点 E (如图2), 折痕 DE 的长为________.

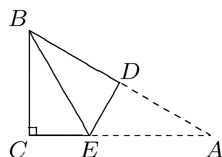


图 2

二、选择题: (本大题共4题, 满分12分)

【下列各题的四个结论中, 有且只有一个结论是正确的, 把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得3分; 不选、错选或者多选得零分】

15. 在下列实数中, 是无理数的为 ······( )

(A) 0; (B) -3.5; (C) $\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{9}$.

16. 六个学生进行投篮比赛, 投进的个数分别为2, 3, 3, 5, 10, 13, 这六个数的中位数是 ······························( )

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6.

17. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$ $AC = 2$, $BC = 3$, 那么下列各式中, 正确的是 ···( )

(A) $\sin B = \dfrac{2}{3}$; (B) $\cos B = \dfrac{2}{3}$;

(C) $\mathrm{tg}\, B = \dfrac{2}{3}$; (D) $\mathrm{ctg}\, B = \dfrac{2}{3}$.

18. 在下列命题中, 真命题是 ············( )

(A) 两个钝角三角形一定相似;

(B) 两个等腰三角形一定相似;

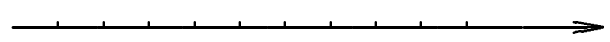
(C) 两个直角三角形一定相似;

(D) 两个等边三角形一定相似.

三、(本大题共3题, 满分24分)

19. (本题满分8分)

解不等式组: $\begin{cases} 3x+1>5-x, \\ 2(x+1)-6<x, \end{cases}$ 并把解集在数轴上表示出来.



20. (本题满分8分)

解方程: $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{8}{x^2-4}$.

21. (本题满分8分, 每小题满分各为4分)

(1) 在图3所示编号为 ①、②、③、④ 的四个三角形中, 关于y轴对称的两个三角形的编号为________; 关于坐标原点O对称的两个三角形的编号为________;

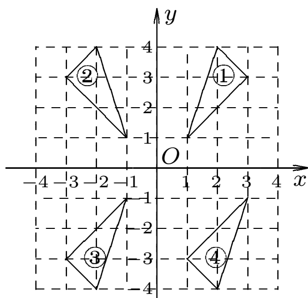


图 3

(2) 在图4中, 画出与$\triangle ABC$关于x轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$.

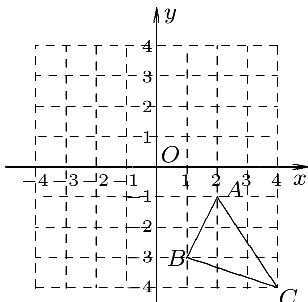


图 4

四、(本大题共4题, 满分42分)

22. (本题满分10分,每小题满分各为5分)

在直角坐标平面中, O为坐标原点. 二次函数$y=x^2+bx+c$的图象与x轴的负半轴相交于点A, 与x轴的正半轴相交于点B, 与y轴相交于点C (如图5). 点C的坐标为$(0,-3)$, 且$BO=CO$.

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 设这个二次函数图象的顶点为M, 求AM的长.

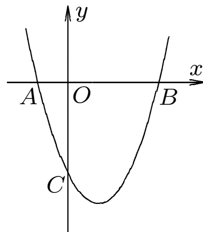


图 5

23. (本题满分10分)

已知: 如图6, 圆O是$\triangle ABC$的外接圆, 圆心O在这个三角形的高CD上, E、F分别是边AC和BC的中点.

求证: 四边形$CEDF$是菱形.

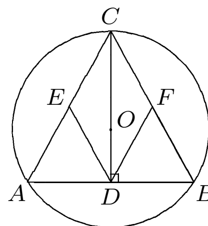


图 6

24. (本题满分10分, 第(1)、(2)、(3)小题满分各为2分, 第(4)小题满分4分)

小明家使用的是分时电表, 按平时段 (6:00 ～ 22:00) 和谷时段(22:00 ～ 次日 6:00) 分别计费. 平时段每度电价为0.61元, 谷时段每度电价为0.30元. 小明将家里2005年1月至5月的平时段和谷时段的用电量分别用折线图表示(如图7), 同时将前4个月的月用电量和相应电费制成表格(如表1).

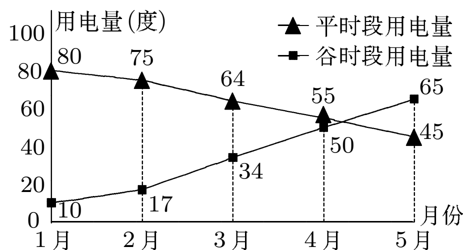


图 7

项目 月份	月用电量 (度)	电费(元)
1月	90	51.80
2月	92	50.85
3月	98	49.24
4月	105	48.55
5月		

表1

根据上述信息, 解答下列问题:

(1) 计算5月份的月用电量及相应电费, 将所得结果填入表1中;

(2) 小明家这5个月的平均用电量为____度;

(3) 小明家这5个月每月用电量呈____趋势(选择"上升"或"下降"); 这5个月每月电费呈____趋势(选择"上升"或"下降");

(4) 小明预计7月份家中用电量很大, 估计7月份用电量可达500度, 相应电费将达243元. 请你根据小明的估计, 计算出7月份小明家平时段用电量和谷时段用电量.

25. **(本题满分12分,每小题满分各为4分)**

在$\triangle ABC$中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, O是边AC上的一个动点, 以点O为圆心作半圆, 与边AB相切于点D, 交线段OC于点E. 作$EP \perp ED$, 交射线AB于点P, 交射线CB于点F.

(1) 如图8, 求证: $\triangle ADE \backsim \triangle AEP$;

(2) 设$OA = x$, $AP = y$, 求y关于x的函数解析式, 并写出它的定义域;

(3) 当$BF = 1$时, 求线段AP的长.

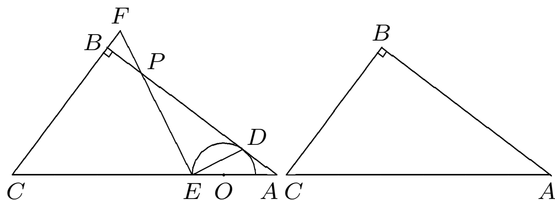


图 8　　　图 9(备用图)

答案要点

一、填空题:

1. x^4;　2. $a(a-2)$;　3. 1;　4. $x \geqslant 0$;

5. 2;　6. $y = 2x$;　7. $y = 2x^2 + 1$;

8. $x^2 - x = 0$等;　9. 4;　10. 7;

11. 6;　12. $20\sin\alpha$;　13. 5;　14. 1.

二、选择题

15. C;　16. B;　17 C;　18. D.

三、19. 解: 由$3x + 1 > 5 - x$, 得$x > 1$.

由$2(x+1) - 6 < x$, 得$x < 4$.

$\therefore$ 不等式组的解集为$1 < x < 4$.

20. 解: 去分母, 得$x(x-2) + (x+2)^2 = 8$.

$x^2 - 2x + x^2 + 4x + 4 = 8$.

整理, 得 $x^2 + x - 2 = 0$.

解得$x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

经检验, $x_1 = 1$为原方程的根, $x_2 = -2$是增根. $\therefore$ 原方程的根是$x = 1$.

21. (1) ① 和 ②; ① 和 ③.

(2) 略.

四、22. 解: (1) $\because$ $BO = CO$, 点C的坐标为$(0, -3)$, 点B在x轴的正半轴上,

$\therefore$ 点B的坐标为$(3, 0)$.

$\because$ 点C、点B在二次函数$y = x^2 + bx + c$的图象上,

$\therefore \begin{cases} c = -3, \\ 3^2 + 3b + c = 0. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} c = -3, \\ b = -2. \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数的解析式为$y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $\because$ $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$,

$\therefore$ 点M的坐标为$(1, -4)$.

又 $\because$ 二次函数$y = x^2 - 2x - 3$的图象与x轴的负半轴相交于点A, $\therefore$ 点A的坐标为$(-1, 0)$. $\therefore$ $AM = \sqrt{(1+1)^2 - (-4-0)^2} = 2\sqrt{5}$.

23. 证法一: $\because$ O为圆心, AB为圆O的弦, $OD \perp AB$, $\therefore$ $AD = BD$.

又 $\because$ $CD \perp AB$, $\therefore$ $AC = BC$.

$\because$ $\angle CDA = 90^\circ$, E是AC的中点,

$\therefore$ $DE = \dfrac{1}{2}AC = EC$.

同理$DF = \dfrac{1}{2}BC = CF$.

$\therefore$ $DE = EC = CF = FD$.

$\therefore$ 四边形$CEDF$是菱形.

证法二: $\because$ O为圆心, AB为圆O的弦,

$OD \perp AB$, $\therefore$ $AD = BD$.

$\because$ D、F分别为AB、BC的中点,

$\therefore FD /\!/ AC$, 且 $FD=\dfrac{1}{2}AC$.

$\because E$ 是 AC 的中点,

$\therefore EC=\dfrac{1}{2}AC=FD$.

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

$\because \angle CDA=90^\circ$, E 是 AC 的中点,

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AC=EC$.

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是菱形.

证法三: 连结 EF, 交 CD 于点 G.

$\because E$、F 分别为 AC、BC 的中点,

$\therefore EF /\!/ AB$.

$\therefore CG=DG$, $\dfrac{EG}{AD}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{GF}{DB}$.

$\because O$ 为圆心, AB 为圆 O 的弦, $OD\perp AB$, $\therefore AD=BD$. $\therefore EG=GF$.

$\because CG=DG$, $EG=GF$,

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形.

$\because EF /\!/ AB$, $CD\perp AB$, $\therefore CD\perp EF$.

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是菱形

24. (1) 110, 46.95; (2) 99; (3) 上升, 下降.

(4) 解: 设小明家7月份平时段用电量为 x 度, 谷时段用电量为 y 度.

根据题意, 得 $\begin{cases} x+y=500, \\ 0.61x+0.30y=243. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=300, \\ y=200. \end{cases}$

答: 小明家7月份平时段用电量为300度, 谷时段用电量为200度.

25. (1) 证明: 如图9, 连结 OD.

根据题意, 得 $OD\perp AB$, 即 $\angle ODA=90^\circ$.

$\because OE=OD$, $\therefore \angle ODE=\angle OED$.

$\because \angle DEP=90^\circ$, $\therefore \angle ADE=\angle AEP$.

又 $\because \angle A=\angle A$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle AEP$.

(2) 解: $\because \angle ABC=90^\circ$, $AB=4$, $BC=3$, $\therefore AC=5$.

$\because OA=x$,

$\therefore OE=OD=\dfrac{3}{5}x$, $AD=\dfrac{4}{5}x$.

$\therefore AE=x+\dfrac{3}{5}x=\dfrac{8}{5}x$.

当点 O 在边 AC 上移动时, 总有 $\triangle ADE\backsim\triangle AEP$, $\therefore \dfrac{AP}{AE}=\dfrac{AE}{AD}$.

$\therefore y=\dfrac{16}{5}x\left(0<x\leqslant\dfrac{25}{8}\right)$.

(3) 解法一: $\because \triangle ADE\backsim\triangle AEP$,

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{PE}{ED}$.

$\because AE=\dfrac{8}{5}x$, $AD=\dfrac{4}{5}x$,

$\therefore \dfrac{PE}{ED}=\dfrac{AE}{AD}=2$.

易证 $\triangle BPF\backsim\triangle EPD$,

$\therefore \dfrac{BP}{BF}=\dfrac{PE}{ED}=2$.

$\therefore$ 当 $BF=1$ 时, $BP=2$.

① 若 EP 交线段 CB 的延长线于点 F (如图10), 则 $AP=4-BP=2$.

② 若 EP 交线段 CB 于点 F (如图11), 则 $AP=4+BP=6$.

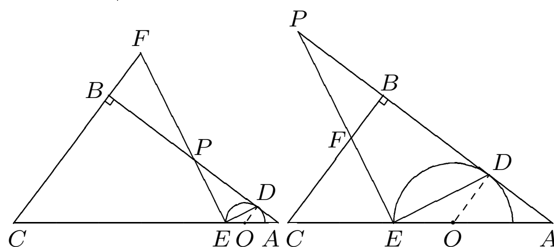


图 10　　图 11

解法二: 当 $BF=1$ 时,

① 若 EP 交线段 CB 的延长线于点 F (如图10), 则 $CF=4$.

$\because \angle ADE=\angle AEP$, $\therefore \angle PDE=\angle PEC$.

$\because \angle FBP=\angle DEP=90^\circ$, $\angle FPB=\angle DPE$. $\therefore \angle F=\angle PDE$.

$\therefore \angle CFE=\angle FEC$. $\therefore CF=CE$.

$\because CE=5-AE=5-\dfrac{8}{5}x$,

$\therefore 5-\dfrac{8}{5}x=4$, 得 $x=\dfrac{5}{8}$.

$\therefore y=2$, 即 $AP=2$.

② 若 EP 交线段 CB 于点 F (如图11), 则 $CF=2$.

类似①. 易得 $CF=CE$.

$\because CE=5-AE=5-\dfrac{8}{5}x$,

$\therefore 5-\dfrac{8}{5}x=2$. 得 $x=\dfrac{15}{8}$.

$\therefore y=6$, 即 $AP=6$.

从上海市2005年春季高考中一题看如何读题

311824 浙江省诸暨市浬浦中学 蔡 明 王苏文

2005年上海市春季高考的数学试卷中很多题目都有相当大的研究价值. 读题与解题是考试中必要的过程, 本文探讨在考完后如何去更仔细地读题与解题, 从中去发掘问题, 做些必要的发散, 发挥考题本身的重要价值.

[题目] 21题: 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(2)=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M、N. (1) 求 a 的值; (2) 问: $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由; (3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.

(本题的解答可见《数学教学》杂志2005年第2期.)

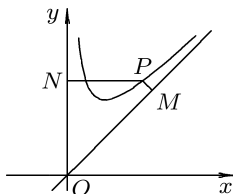


图 1

如果我们在考后用心去读题. 会发掘出一些与第(2)小题可等价转换的结论, 比如: $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$、$\triangle PMN$ 的面积 $S_{\triangle PMN}$ 等问题都与第(2)小题这个是否为定值紧密有关. 仔细分析这个题目的图形, 不难发现 O、M、P、N 四点共圆, 且 $\angle MON=45^\circ$, 故 $\theta=\angle MPN=135^\circ$, 因此 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left|\overrightarrow{PM}\right|\left|\overrightarrow{PN}\right|\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PM}\right|\left|\overrightarrow{PN}\right|\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 也为定值.

那么这些结论的发掘到底有何作用呢? 我们可以反过来看看给出的参考解答, 发现(2)、(3)两个问题均是相对独立地在进行求解, 如果能注意到上面的这些等价转换的结论, 你会发现求(3)中的面积最小值, 实际上需求出三角形 OMN 面积的最小值, 看起来好象解题方法变化不大, 但至少可以看出把问题变得更具体化与合理化, 实现了题目之间的内在联系.

我仔细解答后, 又形成了这样一个想法, 即这两条线是否有特殊性呢? 我们不难知道这两条直线事实上是函数的渐近线. 这更让我想起圆锥曲线中的双曲线, 它也有两条渐近线, 那么上面这个结论在双曲线中是否成立呢?

自编题: 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a、$b>0$) 的右支上任意一点 P, 作两条渐近线的垂线, 垂足分别为 M、N, 问 $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由.

同样可以改为: $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$、$\triangle PMN$ 的面积 $S_{\triangle PMN}$ (因为 $\angle MON$ 为定值).

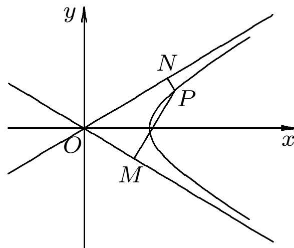


图 2

分析: 设 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 则 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$, 结合点到直线距离公式可得: $|PM|=\dfrac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|PN|=\dfrac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 因此 $|PM|\cdot|PN|=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$, 是定值.

我们可以进一步思考, 将点变到整个曲线

(下转第9–35页)

一道利于培养分析能力的高考题

312000 浙江省绍兴市越秀外国语职业学院 朱才菊

最近几年全国和各省的高考数学试卷较好地体现了能力立意,体现了理性思维的命题改革的思想.所以试题不但具有较强的考试功能,而且具有丰富的教学功能,值得我们去挖掘和利用.本文就2004年全国高考卷(Ⅱ)(四川、吉林用)第22题为例,给出剖析.

题目:已知$f(x)=\ln(1+x)-x$, $g(x)=x\ln x$.

(1)求$f(x)$的最大值;

(2)设$0<a<b$,证明:$0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

其中,第(1)小题容易入手,一般学生几乎都能求得当$x=0$时,$f(x)$取得最大值0.而考查的难点区分度主要体现在第(2)小题,这是一道典型的能力型试题,所涉及的数学知识和方法对每一位考生来说并不陌生,难点是如何去思考探索解题思路.

思路分析一

绝大多数考生首先想到是应用化归思想,把抽象的解析式具体化,然后缩短式子链,即用$g(x)=x\ln x$代入化简:

$$\begin{aligned}&g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}\\&=a\ln a-a\ln\frac{a+b}{2}+b\ln b-b\ln\frac{a+b}{2}\\&=a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b},\end{aligned}$$

∴ 问题就转化成求证不等式:

$$0<a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln 2.$$

若再进一步转化成求证不等式:

$1<\left(\dfrac{2a}{a+b}\right)^a\cdot\left(\dfrac{2b}{a+b}\right)^b<2^{b-a}$,则思维受阻.

若联想到以往解题经验,第(2)小题的证明,往往要利用第(1)小题的结论.而第(1)小题的结论是:当$x=0$时,$\ln(1+x)-x$有最大值0,即$-1<x$且$x\neq 0$时,$\ln(1+x)<x$恒成立.接下去要思考的是如何去利用这一结论?为此往往要注意观察一些表象,如式子结构、不等号方向等等;另外,要善于观察、比较条件和结论之间差异及内在联系,逐步缩小差异,最后消灭差异,达到解决矛盾的目的.

如本题,第一步先分析思考不等式左半部分的证明.要证的不等式是$0<a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}$,与已知条件:当$-1<x$且$x\neq 0$时,$\ln(1+x)<x$恒成立比较,发现存在两大差异.第一,对数式的结构的差异,已知条件中的形式是$\ln(1+x)$,要证的目标中的形式是$\ln\dfrac{2a}{a+b}$和$\ln\dfrac{2b}{a+b}$;第二,不等号的方向相反.由此,就想到应把第(1)小题中得到的不等式的形式变成$-\ln(1+x)>-x$,也就是要证的不等式变成$0<-a\ln\dfrac{a+b}{2a}-b\ln\dfrac{a+b}{2b}$,而对数中的真数部分都应该变成$1+x$的形式,即证$0<-a\ln\left(1+\dfrac{b-a}{2a}\right)-b\ln\left(1+\dfrac{a-b}{2b}\right)$,而不等式$\ln(1+x)<x$的应用,必须满足:$-1<x$且$x\neq 0$的条件,所以必须证明:

$\dfrac{b-a}{2a}>-1$且$\dfrac{b-a}{2a}\neq 0$,及$\dfrac{a-b}{2b}>-1$且$\dfrac{a-b}{2b}\neq 0$.

其中由于$b>a>0$,故$\dfrac{b-a}{2a}\neq 0$,及$\dfrac{b-a}{2a}>-1$显然都成立,而只需证$\dfrac{a-b}{2b}>$

-1成立, 即证$\frac{a-b}{2b}+1>0$成立, 而$\frac{a-b}{2b}+1=\frac{a+b}{2b}>0$成立,

故应用不等式$\ln(1+x)<x$的条件满足, 于是就有

$$\ln\left(1+\frac{b-a}{2a}\right)<\frac{b-a}{2a}$$
$$\Longrightarrow -a\ln\left(1+\frac{b-a}{2a}\right)>-\frac{b-a}{2},$$
$$\ln\left(1+\frac{a-b}{2b}\right)<\frac{a-b}{2b}$$
$$\Longrightarrow -b\ln\left(1+\frac{a-b}{2b}\right)>-\frac{a-b}{2},$$

两式相加得 $-a\ln\frac{2a}{a+b}-b\ln\frac{2b}{a+b}<\frac{b-a}{2}+\frac{a-b}{2}=0.$

即 $0<a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$, 不等式左半部分的思路找到.

第二步再去考虑不等式右半部分的证明思路, 即如何证不等式:

$$a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln 2.$$

按前面的思考方法, 应用第(1)小题的结论: $\ln(1+x)<x$, 不等号的方向与所要证的目标就一致了, 于是进行试探:

$$\ln\frac{2a}{a+b}=\ln\left(\frac{a+b+a-b}{a+b}\right)=\ln\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)<\frac{a-b}{a+b},$$
$$\ln\frac{2b}{a+b}=\ln\left(\frac{b+a+b-a}{a+b}\right)=\ln\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)<\frac{b-a}{a+b},$$

两式相加得 $a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$

$$<a\cdot\frac{a-b}{a+b}+b\cdot\frac{b-a}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{a+b},$$

即只需证 $\frac{(b-a)^2}{a+b}<(b-a)\cdot\ln 2$, 而$b-a>0$, 故只需证$\frac{b-a}{a+b}<\ln 2$, 到此, 可以发现很难达到证明的目的, 思维受阻, 只好回过头来, 换一个角度去观察思考.

观察要证的不等式两边的差异: $a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln 2$, 可以发现两边系数$a$的符号相反, 系数$b$的符号相同, 所以是否可先通过适当变形, 使两边系数a的符号也相同, 就想到了对不等式的左边进行如下变形:

$$a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}=-a\ln\frac{a+b}{2a}+b\ln\frac{2b}{a+b}.$$

于是问题就转化为去证不等式:

$$-a\ln\frac{a+b}{2a}+b\ln\frac{2b}{a+b}<(b-a)\ln 2.$$

但是, 左边的$\ln\frac{a+b}{2a}$与$\ln\frac{2b}{a+b}$不等, 无法提取公因子, 所以, 接下去考虑是否要通过放缩, 把两者变成相同的$\ln x$的形式, 然后可凑合成$(b-a)\ln x$的形式了, 向不等式的右边又靠近了一步.

不妨先比较$\frac{a+b}{2a}$与$\frac{2b}{a+b}$的大小,

$$\because\ \frac{a+b}{2a}-\frac{2b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2a(a+b)}>0,$$
$$\therefore\ \frac{a+b}{2a}>\frac{2b}{a+b},$$

由$\ln x$的单调性得 $\ln\frac{a+b}{2a}>\ln\frac{2b}{a+b}$, 由此可以得到 $b\ln\frac{a+b}{2a}>b\ln\frac{2b}{a+b}$,

或者$-a\ln\frac{a+b}{2a}<-a\ln\frac{2b}{a+b}$.

这两个结果倒底哪一个有用, 还得继续试探. 若用第一式, 则得:

$$-a\ln\frac{a+b}{2a}+b\ln\frac{2b}{a+b}<-a\ln\frac{a+b}{2a}+b\ln\frac{a+b}{2a}=(b-a)\ln\frac{a+b}{2a},$$

问题转化成能否证明 $\ln\frac{a+b}{2a}<\ln 2$, 即证: $\frac{a+b}{2a}<2\Longleftrightarrow a+b<4a\Longleftrightarrow b<3a$, 但无法证明$b<3a$, 所以不能采用, 说明放得过大了; 再试用第二式, 则得:

$$-a\ln\frac{a+b}{2a}+b\ln\frac{2b}{a+b}<-a\ln\frac{2b}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$$

从日本高中招生数学试题看中、日的差异

100025 北京市同仁中学 岳荫巍

有幸接触到日本一些高中(特别是爱知县的高中)的招生试题, 从中可见, 不论公立高中还是私立高中, 其招生试题给人的整体印象, 可以概括为“横看成岭岭不峻, 侧看成峰峰见奇”.

公立校招生, 考五科, 每科满分20分, 考试时间40分钟, 私立校也是考五科, 每科满分100分, 考试时间$40\sim50$分钟(由各校自己决定).

公立校的试题, 因地域不同, 还可分为A、

~~~~~~

$$=(b-a)\ln\frac{2b}{a+b},$$

所以问题转化成证明 $\ln\dfrac{2b}{a+b}<\ln 2$, 即证 $\dfrac{2b}{a+b}<2\Longleftrightarrow 2b<2a+2b\Longleftrightarrow a>0$,

故问题得证.

思路分析二

为了考查考生的学习潜能, 改革后的高考命题中也注意了高等数学思想和知识的渗透, 所以在中学数学教学中, 也应该注意这方面的能力培养, 本题也是一道典型的例题. 构造新函数往往是高等数学证明中的一种重要思想方法. 因此, 就联想到能否把$g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$及 $g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-(b-a)\ln 2$看成某一变量(如$b$或$a$)的函数(另一字母看成常数), 通过求导, 研究函数性质(像第(1)小题那样), 去证明不等式. 于是产生了第二种想法.

先不妨令$F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\dfrac{a+x}{2}\right)$ $(x>a>0)$, 则

$$\begin{aligned}F'(x)&=(x\ln x)'-\left(2\cdot\frac{a+x}{2}\ln\frac{a+x}{2}\right)'\\&=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-(a+x)'\cdot\ln\frac{a+x}{2}\\&\quad-(a+x)\cdot\left(\ln\frac{a+x}{2}\right)'\\&=\ln x-\ln\frac{a+x}{2},\end{aligned}$$

$\because x>a>0$, $\therefore 2x>x+a>0$,

$\therefore x>\dfrac{a+x}{2}$, $\therefore \ln x>\ln\dfrac{a+x}{2}$, 即$F'(x)>0$, $\therefore F(x)$在$(a,+\infty)$上是增函数, 而$F(a)=0$, $\therefore F(x)>F(a)=0$, 即$g(a)+g(x)-2\cdot g\left(\dfrac{a+x}{2}\right)>0\,(x>a>0)$成立,

而$b>a>0$, $\therefore g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0\ (b>a>0)$成立.

同理, 要证不等式的右半部分, 不妨可令$G(x)=F(x)-(x-a)\cdot\ln 2\ (x>a>0)$, 对$G(x)$求导: $G'(x)=F'(x)-\ln 2=\ln x-\ln\dfrac{a+x}{2}-\ln 2=\ln x-\ln(a+x)$, 而$0<x<a+x$, $\therefore \ln x-\ln(a+x)<0$, 即$G'(x)<0$, $\therefore G(x)$在$(a,+\infty)$是减函数, $\therefore G(x)<G(a)=F(a)-(a-a)\ln 2=0$, $\therefore G(x)<0$成立, 即$F(x)<(x-a)\ln 2$成立, 而$b>a>0$,

$\therefore g(a)+g(b)-2\cdot g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$成立, 思路找到.

要有效提高学生分析问题、解决问题的能力, 教师必须要选好典型的例题, 有意识地将自己探究问题的真实思维过程, 以现推现想、出声的思维方式暴露给学生, 让学生通过具体实例, 逐步掌握科学的分析方法. 所以优秀的典型例题是培养能力的必不可少的载体. 而最近几年的高考试题中蕴藏着这方面的丰富资源, 值得广大数学教师去开发利用.
~~~~~~

B卷.

从初中教材几大知识板块在试题中所占地位看, 中日两国基本一致, 然而日本试题的难度, 远远低于我国, 所以说:

一、"横看成岭岭不峻"

1. 二次方程历来是我国中考试题的一个重点内容, 侧重于根的判别式、根和系数关系、解可化为二次方程的某些方程. 这些相关试题, 在日本是少见的, 日本的试题多是解一般一元二次方程, 像下面的例1, 在日本的教学辅导读物中, 特别注有"难"字.

例1 (东京·海城高中)已知方程式$x^2-3x-6=0$的根是a、b $(a>b)$, 方程$x^2-3x-2=0$的根c、d $(c>d)$. 求$(a-c)(b-d)(b-c)(a-d)$的值.

简评: 这是很普通的一道试题, 从求根公式入手, 很容易得到a、b、c、d四个根, 代入到所给代数式中, 得到其积为16.

若从根的意义考虑, 结合两个方程的内在联系, 由$x^2-3x-6=(x^2-3x-2)-4$, 则

$x^2-3x-6=(x-c)(x-d)-4$.

$\because$ a、b是$x^2-3x-6=0$的根.

$\therefore$ $(a-c)(a-d)-4=0$, $(b-c)(b-d)-4=0$.

$(a-c)(b-d)(b-c)(a-d)=16$.

2. 平面几何试题, 我国常放在压轴题或倒数第2、3题的位置, 一般是把圆的性质、相似形综合考查. 日本的平面几何内容, 多以平行四边形、矩形、圆为知识载体, 也是放在倒数1、2题的位置考查.

例2 (2004年爱知县公立校试题B)长方形$ABCD$中, $AD=6\text{cm}$, $AB=5\text{cm}$, $BE=CE=5\text{cm}$, G是ED中点(如图1).

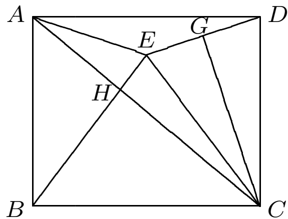


图 1

(1) 求$\triangle CBE$的面积;

(2) 求CG的长;

(3) 设AC与BE交于点H, 求$\triangle AEH$的面积.

略解: (1) $12\,\text{cm}^2$. (2) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\,\text{cm}$.

(3) $\dfrac{45}{26}\,\text{cm}^2$. 过$E$点作$EF\perp BC$于$F$, 交$AC$于$K$. $\triangle EHK\backsim\triangle BHA$, 求得$\dfrac{EH}{BH}=\dfrac{3}{10}$, $\therefore$ $\dfrac{EH}{BE}=\dfrac{3}{13}$, $S_{\triangle AEH}=\dfrac{3}{13}S_{\triangle ABE}$.

而$S_{\triangle ABE}=\dfrac{15}{2}$, $\therefore$ $S_{\triangle AEH}=\dfrac{45}{26}(\text{cm}^2)$.

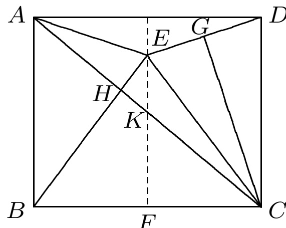


图 2

例3 (2004年名古屋稆山女学园高中)半径为3 cm的圆O中, 直径AB的不同侧有定点C和动点P(如图3). 已知$AB:BC:CA=5:4:3$, 点P在$\overset{\frown}{AB}$上运动, PB延长线上有一点Q, 且$CQ\perp CP$.

(1) 当CP等于圆的直径时, 求CQ的长;

(2) 当P与A重合, Q与B重合为起始状态, 然后P开始沿$\overset{\frown}{AB}$从A运动到B, Q从B运动到B'时, 求点Q运动的长度;

(3) 求(2)中CQ运动中扫过的面积.

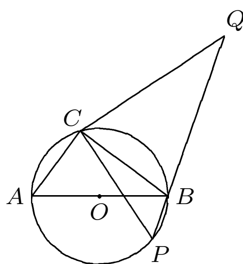


图 3

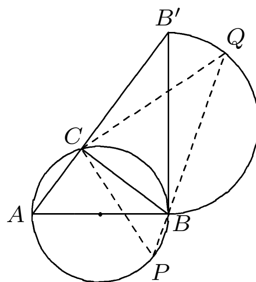


图 4

略解: (1) $CQ=8\,\text{cm}$.

(2) 当P与B重合, Q与B'重合时, 点Q轨迹是弧BB'——半圆. 由题设可求得$BC=\dfrac{24}{5}$

cm, 又由$\triangle BCB'\backsim\triangle ACB$, 求得$BB'=8$ cm, 所以 $\overset{\frown}{BB'}=4\pi$ cm.

(3) CQ扫过的面积是以BB'为直径的半圆面积与Rt$\triangle BCB'$面积之和, 根据三角形相似求得$B'C=\frac{32}{5}$ cm, 则所求面积为$\frac{384}{25}+8\pi(\text{cm}^2)$.

3. 二次函数是我国中考重点考查的内容, 且都放在压轴题位置, 有相当的难度, 日本的高中招生试题, 虽然也常常把二次函数试题放在最后一题, 但其难度无法与我国相比. 像北京2003年那样的二次函数试题, 在日本的试题及课外读物中, 均无法见到. 我检索到的惟一关于二次函数的难题(书上注明的)如下:

例4 (爱媛县·爱光高中)矩形$ABCD$的顶点A、D在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$上(如图5), A点横坐标为$a(a>0)$. P是BC上一点, P点横坐标是$\frac{a}{2}$. OP交AD于Q, PQ分矩形$ABCD$为两部分, 且$CDQP$与$ABPQ$面积的比为7:3.

(1) 求点Q的横坐标;

(2) 求AB边的长.

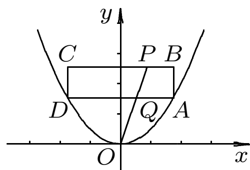


图 5

略解: (1) $A\left(a,\frac{1}{2}a^2\right)$. 设$P\left(\frac{a}{2},b\right)$、$Q\left(x,\frac{1}{2}a^2\right)$、$B(a,b)$. OP对应一次函数$y=\frac{2b}{a}x$, 可求得$Q\left(\frac{a^3}{4b},\frac{1}{2}a^2\right)$. 进一步求得$|BP|=\frac{a}{2}$, $|AQ|=a-\frac{a^3}{4b}$, $|AB|=b-\frac{1}{2}a^2$.

梯形$CDQP$与$ABPQ$面积比为7:3, 则$ABPQ$面积是矩形面积的$\frac{3}{10}$,

由$\frac{1}{4}\left(3-\frac{a^2}{2b}\right)a\cdot|AB|=\frac{3}{10}\cdot 2a\cdot|AB|$,

解得$b=\frac{5}{6}a^2$, Q点横坐标为$\frac{3}{10}a$.

(2) $|AB|=b-\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{3}a^2$.

本题考查一次函数、二次函数的基础知识及待定系数法, 具有一定的综合性, 但与我国压轴题难度相比, 似乎还够不上最后一道题的水平.

二、"侧看成峰峰见奇"

日本的中考试题, 从命题的立意和构思看, 也有很多新奇之处, 值得我们参考, 如例2中之(3)求面积的思路; 例3中(2)的想象力就反映了一个侧面.

1. 对于传统的几何题, 推陈出新, 即老问题巧设问.

例5 (2004年名古屋经济大学市村高中)如图6, 公路AB的一侧有一块土地, 以折线OPQ (小路)为界分成面积比为1:2的两块, 分别为两家开发商所有. 为了使各自的小区整齐, 便于合理规划, 两家协商将小路OPQ取直, 但仍保持各自土地面积比不变, 请你用红线画出取直后的小路, 并说明你的设计的合理性.

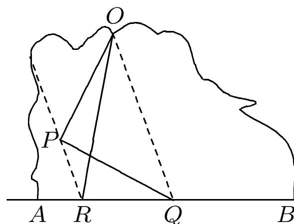


图 6

这是一道考查等积变换的传统题, 我国近几年的中考题已不多见, 在这里它融合社会生活实践, 有实际应用价值.

画法: 连结OQ, 过P点作OQ的平行线交AB于R, 连结OR, 则OR为取直后的道路, 且路左右两侧土地面积比仍为1:2. 证明略.

2. 重视分析、归纳推理能力的考查.

例6 (2003年名古屋经济大学市村高中)有如图7的通道, 通过时, 只许向前进, 不可向后折返而迂回通过, 如图8. 请问

(1) 从1到5有几种不同的走法;

(2) 从1到10有几种不同走法.

本题从所用知识看, 应是考查加法计数原理和乘法计数原理, 可是日本的初中数学教材, 根本不讲排列、组合. 所以, 从本质上看是考

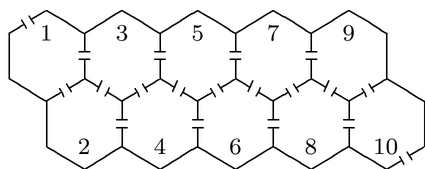


图 7

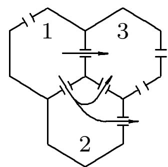


图 8

查学生的分析、推理能力——要求学生自己运用自己的数学素养, 理解计数原理并能应用.

略解: (1) 应用列举法, 发现有5种不同走法.

(2) 从1到10的走法分两类:

第一类: 从1经过5到10. 因从1到5有5种走法, 而从5到10有8种走法, 即 $5-7-9-10$, $5-6-8-10$, $5-7-8-10$, $5-7-8-9-10$, $5-6-7-9-10$, $5-6-8-9-10$, $5-6-7-8-10$, $5-6-7-8-9-10$.

所以从1经过5到10有 $5\times 8=40$ (种).

第二类: 从1到4再从4到10. 通过列举可知, 从1到4有3种不同走法, 从4到10有5种不同走法, 所以从1经过4到10有 $3\times 5=15$ (种).

所以从1到10有 $40+15=55$ 种不同走法.

3. 日本的初中教材, 有等可能事件概率和立体几何基础知识, 概率求解不涉及排列组合知识, 立体几何不要求严格推理论证, 重点放在空间想象能力及面积、体积计算上. 从试题看似乎我国是讲究"精深", 日本是讲究"广博".

例7 (2004年名城大学附属高中)有标号为1、2、3、4的4个盒子, 分别放标号为1、2、3、4个球.

(1) 只有一个球的标号与盒子标号相同的概率是多少?

(2) 球与盒子标号互不相同的概率是多少?

略解: 4个球放入4个盒子中, 有24种不同放法. 所以 (1) 所求概率为 $\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 球与盒子标号互异的放法有9种, 可以用列举法求得.

这与我国1993年的一道高考题类似, 该题是: 同室四人各写一张贺年卡, 先集中起来, 然后每人从中拿一张别人送出的贺卡, 则四张贺卡不同的分配方式有··························( )

(A) 6种; (B) 9种; (C) 11种; (D) 23种.

本题 (2) 的答案是 $\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$.

例8 (2003年名古屋女子大学附中)如图9, 长方体的长 $AC=20\text{cm}$, 高 $AD=9\text{cm}$, 宽8cm. B、E 分别是上、下底面对角线的交点,

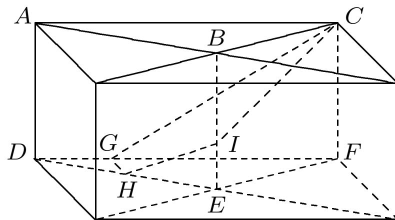


图 9

$DG:GF=1:3$, $DH:HE=1:1$, $EI:IB=1:2$. 求以 $GHEF$ 为底面与过 C、H、I 三点的截面围成的几何体的体积.

略解: 如图10. 设 DF、AC 中点为 L、T, 作 $IK/\!/EL$, $IM/\!/EF$. 将所求几何体分割成几个常见几何体, 分别去求体积.

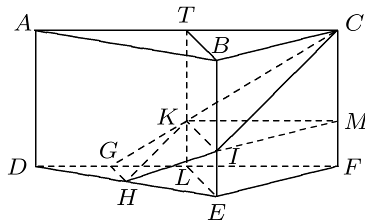


图 10

设 $C-KIM$ 体积为 V_1, $KLM-LEF$ 体积为 V_2, $H-EIKL$ 体积为 V_3, $K-GHL$ 体积为 V_4, 则总体积 $V=V_1+V_2+V_3+V_4=40+60+20+5=125\,(\text{cm}^3)$.

4. 用定义型试题, 考查学生的接受能力、理解能力及应用能力.

定义型试题, 我国多在竞赛题、高考题中出现, 在日本, 中考试题中就开始有了.

(下转第9–26页)

编后漫笔

有感于“数学教育神话”

张奠宙　赵小平

本期刊出一篇译文, 说的是有关美国数学教育的“学习神话”. 这是持不同意见双方的辩论纪要. 一方面是美国最具权威的数学教育组织——“全美数学教师协会(NCTM)”, 2000年编制的《数学课程标准》为许多美国学区采用, 并影响世界. 另一方则是一群对美国数学教育不满的学者和家长. 美国关于数学教育的辩论由来已久, 世称“数学战争”. 这次的辩论, 由华盛顿邮报记者组织双方的意见, 在报上公开发表.

读了这篇报道, 第一个感觉是: 中国也同样流传着这样的神话. 近年来的数学教育导向, 视“过去的”为“传统的”, 而传统观念则是需要转变的. 启发式、“加强双基”、记忆练习等等, 似乎都“过时了”. 今日提倡的数学教学模式, 只能是“情景、活动、合作、探究、发现”. 建构主义被捧到天上, 成为学习理论的新纪元和革命. 教师的主导作用不敢提了, 讲授成了错误. 学生只有自己探索才是获得知识的源泉. 读了这篇报道, 我们知道这样的神话在美国盛行, 中国的数学教育神话看来源自美国.

这篇报道给我们的第二个启示是, 教育改革需要辩论. 教育理念需要在争论中形成, 改革不能靠强力推行. 美国的NCTM是一个权威机构(虽然是民间组织). 她所主张的“问题解决”数学教育模式, 曾经风靡世界. 那么NCTM的主张是否正确呢? 在美国是有争论的. 中国的数学教育目前也面临着争论. 这是好事. 不过, 我们缺少一种面对面的争论气氛. 一派声音大了, 另一派就不作声了. 过了一阵, 这派声音大, 那派又沉默着. 影响到基层, 就会感觉到在“翻烧饼”.

中国是一个有悠久历史、丰富实践经验的教育大国. 独立思考, 不随波逐流, 用自己的头脑思考, 并在这基础上, 开展学术争论. 这样做, 有助于中国的数学教育的发展与进步. 破除一些不合实际的“神话”, 也是对世界数学教育的一份贡献.

(上接第9–29页)

$\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 因Rt$\triangle ADE\backsim$ Rt$\triangle PDA$, 故

$$ED=\frac{AD^2}{PD}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(3a)^2}}=\frac{a}{\sqrt{10}},$$

$$OH=\frac{1}{2}ED=\frac{a}{2\sqrt{10}}.$$

在Rt$\triangle AHO$中,

$$\sin\angle HAO=\frac{OH}{AO}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2005年第9期

(总第216期)

主编: 张奠宙　赵小平

常务副主编: 忻重义

电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学

出　版: 《数学教学》编辑部

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

广告许可证: 沪工商广字 07017号

印　刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357